



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Клименко Дмитрий Алексеевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Клименко Дмитрий Алексеевич

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	5 баллов	20 баллов	0 баллов	20 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Полнотаемость $6, 7, \dots$

На 2022 имеет число $2022+6-1=2027$

$$45^2 = 2025 < 2027$$

$$46^2 = 2116 > 2027$$

$$12^3 = 1728 < 2027$$

$$13^3 = 2197 > 2027$$

$\Rightarrow$ Последний ~~квадрат~~ квадрат из нечетных 45^2

$\Rightarrow$ Последний куб из нечетных 12^3

нечетные квадраты $3^2, 4^2, \dots, 45^2$ всего $45-3+1=43$ числа
нечетные кубы $2^3, 3^3, \dots, 12^3$ всего $12-2+1=11$ числа

Но число совпадает, всего $4^3 = 8^2, 9^3 = 27^2$ всего 2 числа

всего нечетных $43+11-2=52$ числа

Значит на 2022 имеет будет число $2027+52=2079$

$46^2 > 2079, 13^3 > 2079$, значит число больше нечетных не надо.

Ответ. 2079

√2.

ЧИСТОВИК
ЛИСТ 2

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{\sin 100^\circ} = 1 \Rightarrow \arccos 1 = 0$$

Однако решим по $\arccos(x-1)$: $x \in [0; 2]$

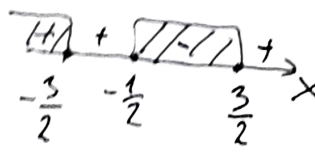
$$\arccos(x-1) \in [0; \pi] \geq 0$$

II $\arccos(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2$
Крайнего значения

Получили неравенство

$$8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \arccos(x-1) \leq 0 \text{ или 2 случая (I и II)}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \quad \text{I} \quad \arccos(x-1) > 0 \Rightarrow x \in [0; 2)$$



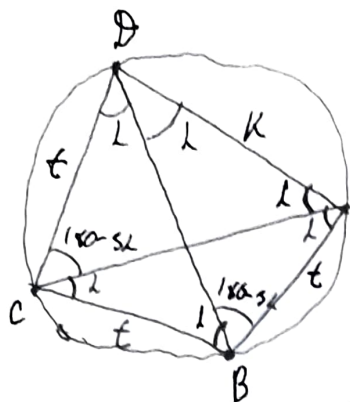
$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] \\ x \in [0; 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [0; \frac{3}{2}]$$

$$\text{Ответ } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

№ 3. (часть 1)

ЧИСЛОВИК

ЛИСТ 3



$$AB=BC=CD=t, \text{ а } AD=K$$

А Так как хорды стягивают равные дуги,
то $\angle CAB = \angle CBD = \angle ACD = \angle BDA = \angle ACB = \angle BDC = \angle CAD = \angle DBA = 180^\circ - 6L \Rightarrow \angle BDA = \angle DBA = 180^\circ - 3L$

$$AC = \sqrt{t^2 + t^2 - 2t^2 \cos(180-2L)} = t \sqrt{2+2\cos(2L)}$$

$$BD = \sqrt{t^2 + t^2 - 2t^2 \cos(2L)} = t \sqrt{2+2\cos(2L)}$$

По теореме Птолемея $\Rightarrow AC = BD$

$AC \cdot BD = CD \cdot AB + CB \cdot AD$ По теореме Птолемея

~~$$AC \cdot BD = CD \cdot AB + CB \cdot AD \Rightarrow AC \cdot AC = t^2 + tK \Rightarrow AC^2 = t^2 + tK$$~~

$$AC^2 = t^2 + tK, \quad AC^2 = t^2 + 2t^2 \cos(2L)$$

$$t^2 + tK = 2t^2 + 2t^2 \cos(2L)$$

$$t + K = 2t + 2t \cos(2L)$$

$$K = t + 2t \cos(2L)$$

$$\angle DAC = \angle ACB = L \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. о параллельных хордах

хорды $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ — параллелограмм (сдвинуто)

~~АК — хорда, стягивающая дугу BC — хорда BC $\Rightarrow 2 + 2 \cos(2L)$ — хорда AC — хорда AC~~

~~$$AC - \text{хорда} \Rightarrow t \sqrt{2+2\cos(2L)} - \text{хорда}, K - \text{хорда} \Rightarrow t(1+2\cos(2L)) - \text{хорда}$$~~

~~$$\text{Примем } t=1 \Rightarrow AC = \sqrt{2+2\cos(2L)} \Rightarrow \begin{cases} \cos(2L)=1 \\ \cos(2L)=-0,5 \end{cases}$$~~

~~$$\cos(2L) \neq 1 \Rightarrow 2\cos^2 L - 1 = 1 \Rightarrow \cos^2 L = 1 \Rightarrow \cos L = \pm 1 \Rightarrow L = 0^\circ, 180^\circ \text{ не в } \mathbb{Z} \text{ м. } L=0^\circ \Rightarrow \text{не может.}$$~~

~~$$\cos(2L) = -0,5 \Rightarrow K = 1 + 2 \cdot (-0,5) = 0 \Rightarrow K \text{ не хорда.}$$~~

~~$$\text{Положим } t=4 \Rightarrow AC = 4\sqrt{2+2\cos(2L)}, K = 4 + 8\cos(2L)$$~~

~~$$\begin{cases} \cos(2L) = \frac{1}{8} \\ \cos(2L) = -\frac{1}{8} \end{cases} \text{ Пусть } \cos(2L) = \frac{1}{8} \quad AC = 4\sqrt{2+\frac{1}{4}} = \sqrt{32+4} = 6,$$~~

~~$$K = 4 + 1 = 5, \quad 4\cos^2 L - 1 = \frac{1}{8}$$~~

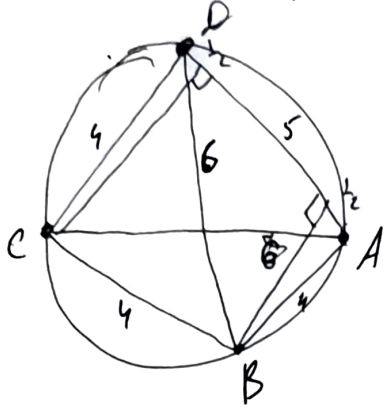
~~$$\cos^2 L = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos L = \pm \frac{1}{2}$$~~

~~$$\cos(2L) = \pm 1$$~~

№ 3 (задача 2)

ЧУСТОВИК
Лист 4

$t=4, k=5 \Rightarrow AC=BD=6$



$$\cos(\alpha) = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Реш.

По м. изобразим $\triangle ACD$ ~~и т.д.~~ $\frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = 2R = R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

Иском. $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

№ 4

ЧИСЛОВИК

ЛИСТ 5

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022} = \left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 1$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1 = (a_n - 1)^3 + 1$$

Тогда $a_2 = (a_1 - 1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3 + 1$

$$a_3 = (a_2 - 1)^3 + 1 = \left(\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3\right)^3 + 1$$

$$a_4 = (a_3 - 1)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{27} + 1$$

$$\vdots$$

$$a_L = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{L-1}} + 1$$

$$a_{L-1} > a_L$$

$1 - \frac{1}{2022} > 0, 10 < 0$, значит $a_L > 1$, ~~$a_L > 1$~~

Покажем $\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{L-1}} + 1 > \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^L} + 1$

$$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{L-1}} > \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^L}$$

$$3^{L-1} < 3^L$$

$$L-1 < L$$

$$-1 < 0$$

меньше ~~знач~~ т.к. $\left(1 - \frac{1}{2022}\right) < 1$

Сравним a_L и $\frac{2022}{2021}$

$$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{L-1}} + 1 \wedge \frac{2022}{2021}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{L-1}} \wedge \frac{1}{2021}$$

$F(x) = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{x-1}}$ - монотонно убывает т.к. 3^{x-1} возрастает, $a\left(1 - \frac{1}{2022}\right) < 1$
 $F(x) > 0$, $F(x)$ стремится к 0, значит можно найти такое число n , что $a_n \leq \frac{2022}{2021}$, значит и, что $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$

№ 6 (задача 2)

ЧИСТОВИ К

ЛИСТ 7

на отрезке $x \in [0, 5]$

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0 \end{cases}$$

не верно для $a \geq 12$

$$\begin{cases} -(4x^2 + a) \leq 4x + 8x \end{cases}$$

не верно

Получив образцы мы показали при каких a будет
точка $x=3$, показывая, что при остальных a не будет
каким, когда либо $a=2$ и $a=4$.

Ответ: $\{8, -2, 4\}$

6, 1, 8,

2027, ...

~~Черновик~~

$$45^2 = 9 \cdot 5^2 = \frac{9^2 \cdot 100}{4} = \frac{8100}{4} = 2025$$

$$45^2 = 2025$$

$$44^2 = 1936$$

$$46^2 = 2116$$

$$15^3 = 2197$$

$$| \leq | \dots | + | \dots | < 44^2$$

$$3^2, 4^2, 5^2, \dots, 45^2 \quad 45 \cdot 511 = 45 \text{ null}$$

$$\text{но } 4^3 = 8^2, \quad 9^3 = 27^2, \quad \text{2 совпадения}$$

$$2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, \dots, 12^3 \quad 12 - 2 + 1 = 11 \text{ null}$$

$$\text{но } 43 + 11 - 2 \text{ null} = 52 \text{ null}$$

$$2024 + 52 = 2076$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 8(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ \cos 40^\circ} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ}{\cos 50^\circ \cos 40^\circ} = \sqrt{2} [0, 2]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 100^\circ} = 1$$



$$\frac{2}{64} - 1 = \frac{1}{32} - 1 = -\frac{31}{32}$$

$$8(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) \arccos(x - 1) \leq 0$$

$$\arccos t \in [0, \pi] \geq 0 \Rightarrow 8(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) \leq 0$$

