



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Баранова Юлия Александровна**

Класс: **9**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Баранова Юлия Александровна

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Чистовик Задача 1

Пусть изначально работников было n , где n - натур. число. Т.к. хотя бы 1 работник заболел и их осталось 7, то $n > 7$. Пусть общий заказ z грядок, где $z \in \mathbb{N}$ и $z > 10$. Объявили произв. 1 рабочего $\frac{z}{q}$ грядок/день, где $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{z}{q}$ - несократимая дробь. Тогда в первый день мог момент написать $n \cdot 1 \cdot \frac{z}{q} = 10 \Rightarrow n \cdot p \cdot \frac{z}{q} = 10 \Rightarrow$ т.к. $n, p, q \in \mathbb{N}$ и $p:10$

$\Rightarrow 10q = np$, т.к. $q, n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow 10q : p$, т.к. p и q взаимно просты $\Rightarrow 10 : p$, т.к. $p \in \mathbb{N} \Rightarrow p \in \{1; 2; 5; 10\}$. Теперь рассмотрим на II день:

$\frac{7}{\text{коп. во работн.}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{q} = 2 - 10 \Rightarrow \frac{7}{2} \cdot \frac{z}{q} = 2 - 10 \Rightarrow \frac{7z}{2q} = 2 - 10$, т.к. $z > 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7z}{2q} \in \mathbb{N} \Rightarrow 7z : 2q \Rightarrow 7z : q$, т.к. p и q взаимно просты, то $7 : q \Rightarrow q \in \mathbb{N}, q \in \{1; 7\}$.
 $7z : 2$, т.к. 7 и 2 взаимно просты, то $z : 2$ и при этом $p \in \{1; 2; 5; 10\} \Rightarrow p \in \{2; 10\}$.

Теперь есть рассмотреть все возможные варианты дробей $\frac{p}{q}$ и значение p и для них.

$\frac{p}{q} = \frac{2}{1}$; $n \cdot \frac{p}{q} = 10 \Rightarrow n = 10$; $\frac{p}{q} = 10 : 2 = 5$; $5 < 7$ - не подх.
 $\frac{p}{q} = \frac{2}{7}$; $n = 10$; $\frac{p}{q} = 10 : \frac{2}{7} = 35$; $35 > 7$ - подх., $2 = 10 + \frac{7}{2} \cdot \frac{p}{q} = 10 + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} = \boxed{11 \text{ грядок!}}$
 $\frac{p}{q} = \frac{10}{1}$; $n = 10$; $\frac{p}{q} = 10 : 10 = 1$; $1 < 7$ - не подх.
 $\frac{p}{q} = \frac{10}{7}$; $n = 10$; $\frac{p}{q} = 10 : \frac{10}{7} = 7$; (если можно забрать 0 работн., то этот вариант подходит; $2 = 10 + \frac{7}{2} \cdot \frac{p}{q} = 10 + \frac{7}{2} \cdot \frac{10}{7} = \boxed{15 \text{ грядок!}}$).

Ответ: 11 грядок.

Задача 2

Представили числа abc и aeb в другом виде: $abc = 100a + 10b + c$; $aeb = 100a + 10c + b$. Тогда $abc - aeb = 100a + 10b + c - (100a + 10c + b) = 9b - 9c = 9(b - c) : 72$. Тогда $9(b - c) : (9 \cdot 8) \Rightarrow b - c : 8$. b и c - цифры $\Rightarrow 0 \leq b \leq 9$; $0 \leq c \leq 9$. (b и c могут быть равны 0, т.к. это не первые цифры числа). Тогда разность $b - c \in [-9, 9]$ и $b - c \geq 0 - 9 = -9$, и она должна быть $: 8 \Rightarrow$ $b - c$ равно $-8, 0$ или 8 . Рассмотрим все эти варианты.

Числовые Задача 2 (продолж.)

.) $b-c = -8 \Rightarrow b+8=c$, т.к. $c \leq 9 \Rightarrow b \leq 1$. если $b=0$, то $c=8$;
если $b=1$, то $c=9$.

Тогда чтобы получить нужное число раз abc мы можем поставить на места a и b любое из 10 цифр кроме 0, т.е. 9 вар и 2 вариантами

выбрать пару $(b,c) \Rightarrow$ общее кол-во таких чисел $9 \cdot 2 = 18$

.) $b-c=0 \Rightarrow b=c$. Тогда abc может быть любой из 10 таких: $(0;0); (1;1), \dots (9;9)$. $\Rightarrow$ кол-во чисел abc равно 10. $10 \cdot 10 = 100$

.) $b-c=8 \Rightarrow c+8=b$, т.к. $b \leq 9 \Rightarrow c \leq 1$. если $c=0$; $b=8$
если $c=1$; $b=9$.

Общее кол-во чисел abc равно: $9 \cdot 2 = 18$
вар. abc abc (b,c)

Заметим, что никакие 2 вар несовместимы, т.к. в разных вариантах разные варианты (b,c) . Тогда общее кол-во подходящих по условию чисел abc равно $10+90+18 = 126$.

Ответ: 126.

Задача 3

$(x+y)(x+y+1)+y = 2022$. Заменим $x+y$ на s ($s=x+y$), тогда $s \in \mathbb{N}$ и $s > y$, т.к. $x+y > y$ (т.к. $x, y \in \mathbb{N}$). Тогда равенство примет вид как $s(s+1)+y = 2022$. $y > 0 \Rightarrow s(s+1) < 2022$. Заметим, что если

$s \geq 45$, то $s(s+1) \geq 45 \cdot 46 = 2070 > 2022$ - противоречие. $\Rightarrow s < 45$, а
т.к. $s \in \mathbb{N}$, то $s \leq 44$. Т.к. $y < s$, то $s(s+1)+y < s(s+1)+s =$
 $= s^2 + 2s = (s+1)^2 - 1 \Rightarrow 2022 < (s+1)^2 - 1 \Rightarrow 2023 < (s+1)^2$, заметим, что
если $s \leq 43$ ($s > 0$, т.к. $s \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (s+1)^2 \leq (43+1)^2 = 44^2 = 1936 < 2022$ - и/о.
противоречие $\Rightarrow s > 43$, т.к. $s \in \mathbb{N}$, то $s \geq 44$. Мы получили, что $s \leq 44$ и
 $s \geq 44 \Rightarrow$ единств. вариант, что $s = 44$. Тогда $s(s+1)+y = 2022 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = 2022 - s(s+1) = 2022 - 44 \cdot 45 = 2022 - 1980 = 42$.

$y = 42$; $s = x+y \Rightarrow x = s-y = 44-42 = 2$. Получается, что пара
 $(2; 42)$ - единств. парное ур-ние. равенству
 $(2+42)(2+42+1)+42 = 2022$ ✓.

Ответ: $(2; 42)$.

Задача 4

Числовик

Рассмотрим условную сетку 5×6 , которая будет представлять из себя вид замка сверху. Мы будем закрашивать клет. на горизонт. и вертикал. крестик.



Сторона сетки 5×6 , т.е. на виде сверху ширина замка 5 кубиков, а на виде сбоку 6. Т.к. вид сверху и сбоку симметричны, можно без обрам. считать, что это вид слева. справа. И

Т.к. сверху мы видим 5 столбцов, значит в каждом столбце каждой решетки есть хотя бы 1 закраш. клетка. Т.к. сбоку кубики присутствуют в 6 столб. значит в решетке в каждой строке закрашено хотя бы 1 клетка. Теперь рассмотрим, где могут располаг. столбики высотой в 3 кубика (смотрим, где в решетке будет их верхний кубик); увидя по виду сверху, таких столбиков хотя бы 3 (хотя бы по I, IV и V столб. решетки); теперь рассмотрим на вид сбоку, в нем только 2 столб. по 3 кубика, это (они соотв. III и IV строки реш.) значит в других строках столбики по 3 кубика находятся немо могут. Тогда т.к. столбиков по 3 куб. ≥ 3 а среди верх. куб. располо. в 2 строках реш., то в какой-то строке расположено ≥ 2 таких столбика, т.е. в какой-то строке закрашено ≥ 2 клетки. Тогда во всей реш. закраш. хотя бы $2 + 1 \cdot (6-1) = 7$.

Приведем пример на 7. (В закраш. клетках ^{≥ 1 кв. в верх. стр.} будет еще писать сколько кубиков в высоту располо. на этой позиции).



Ответ: 7

Задача 5

$x^2 + ax + 2022 = 0$ Чтобы у этого ^{квадр.} ур-я были действ. корни, нужно, чтобы его дискриминант был ≥ 0 .

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2022 = a^2 - 8088 \geq 0$. Т.к. ~~а~~ ^{Всегда} ~~меньше~~ 0, значит, что $a \geq 0$ (т.к. а меньше от 0 до 89). $a^2 \geq 8088 \Rightarrow |a| \geq \sqrt{8088}$ ~~а~~

если $0 \leq a \leq 89$, то $a^2 \leq 89^2 = 7921 < 8088$ - противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow a > 89$, а т.к. $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \geq 90$. При $a \geq 90$: $a^2 \geq 90^2 = 8100 > 8088 \Rightarrow$

$\Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ каждое ур-е имеет 2 различных корня.

Тогда мы получим, что при $a \geq 90$ каждое ур-е имеет по 2 ^{разных} корня.

Страница 3/6

Числовик

Задача 5 (проект)

7.е. По Теореме Виета дан ур-е $x^2+ax+2022=0$. и-е $x_1+x_2=-a$ (где x_1 и x_2 - корни этого ур-я). Тогда Тогда напишем для каждого ур-я, имеющего корни, их сумму.

Ур-е	Сумма корней	
$x^2+90x+2022=0$	$-a=-90$	$(a=90)$
$x^2+91x+2022=0$	$-a=-91$	$(a=91)$
⋮		
$x^2+99x+2022=0$	$-a=-99$	$(a=99)$

Т.к. a меняется от 0 до 99, ур-е $x^2+99x+2022$ будет последним).

Заметим, что у 2 разных ур-я корни совпадают не могут.

Укажем пусть корни x_1 является корнем ур-я $x^2+a_1x+2022=0$ и $x^2+a_2x+2022=0$, тогда $\begin{cases} x_1^2+a_1x_1+2022=0 \\ x_1^2+a_2x_1+2022=0 \end{cases}$ Вычтем из верхн. нижнее.

$$(a_1-a_2)x_1=0, a_1 \neq a_2 \Rightarrow x_1=0, \text{ то, тогда } x_1^2+a_1x_1+2022=0+0+2022 \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие} \Rightarrow \text{корни не повторяются.}$$

Тогда сумма всех корней будет равна сумме сумм корней для каждого ур-я, т.е. ~~$-90+(-91)+(-92)+\dots+(-99)$~~ $(-90)+(-91)+\dots+(-99)$. Это сумма 10 членов арифм. прогрессии $\Rightarrow (-90)+(-91)+\dots+(-99) = \frac{-189 \cdot 10}{2} = -945$.

Ответ: -945.

Задача 6

Если из Талат. в на Пангору есть прямые дороги, то за 1 прямая линия Ригз доберётся и это будет минимальная. Пусть таких дорог нет. Рассмотрим всю ситуацию, как граф, в котором плакаты - вершины, а если с талат. А можно добр. на талат. В, то кариедиз офисированное ребро из А в В. Ну по уел. из кажд. верш. выходит 40 ребер, и входит в каждую тоже 40 ребер. Обозначим за верш. Г и П. Талатю-37 и Пангору. Предполож., что из Г в П ребра нет. Тогда из Г ведут ребра в какие-то другие 40 вершин. Назовём эту группу из 40 вершин "близкие к Г". Если хотя бы из 1 "близкой к Г" вершины идёт ребро в П, то можно добраться за 2 прямых и это будет минимальная путь. Если это не так. То рассмотрим на вершину П, в неё ведёт 40 ребер из вершин, отдалённых от Г и "близких к Г" тогда возьмём эту группу из 40 вершин и назовём их "близкими к П". Пусть из "близких к Г" нет ни 1 ребра в "близкие к П". Страница 4/6



Задача 6 (продолж.) Числовик



18



Посмотрим, сколько вершин не попали ни в одну группу: $100 - 1 - 40 - 40 - 1 = 18$. Назовём их "далёкими".

Посмотрим, куда могут входить рёбра из "ближних к Г" вершин. Рёбра могут входить в "далёкие" и в другие "ближние к Г" вершины. Из "ближних к Г" должно выходить $40 \cdot 40 = 1600$ рёбер. Вспомогательная группа "ближние к Г" может быть проведена $\leq \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$ рёбер, каждое из которых является входящим и равно для 1 "ближних к Г" вершины. Тогда из "ближних к Г" в "далёкие" выходит $\geq 1600 - 780 = 820$ рёбер. Тогда заметим, что в каждую из "далёких" вершин входит 40 рёбер, а значит во все "далёкие" вершины входит $18 \cdot 40 = 720$ рёбер, но $720 < 820 \Rightarrow$ такого быть не может $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ из хотя бы из 1 "ближних к Г" вершины есть рёбра в "ближнюю к П" вершину. Тогда мы можем идти за 3 прохода. ~~и доказано~~ Получается, что минимальная группа не может быть 1, 2 или 3 прохода.

Ответ: 1, 2 или 3 прохода.

