



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Дорогин Николай Антонович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Дорогин Николай Антонович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	0 баллов	20 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Задача 2: В: 11-1

Чистовик 1
Лист 1 из 10

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos(40^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(50^\circ)}\right)$$

1) разложим кубическое

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = (4x^2 - 9)(2x+1) =$$

$$= (2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

2) ~~мы~~ преобразуем левую часть:

$$\frac{1}{4\cos(40^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(50^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}\cos(50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(50^\circ)}{2\cos(40^\circ)\cos(50^\circ)} = \frac{\sin(30^\circ+50^\circ)}{2\cos(40^\circ)\cos(50^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin(40^\circ)\cos(40^\circ)}{2\cos(40^\circ)\cos(50^\circ)} = \frac{\sin(40^\circ)}{\cos(50^\circ)} = 1 \Rightarrow \text{П.7.} = 0$$

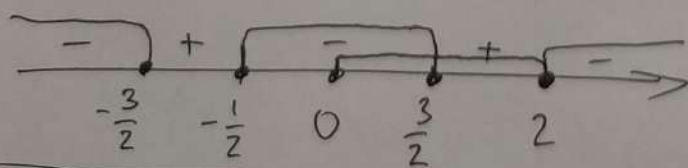
3) после всех преобразований полученное ~~неравенство~~ уравнение
будет выглядеть:

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq 0 ; \text{ограничения:}$$

Решаем методом интервалов
Находим корни и наносим
на числовую прямую

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$



! не забываем
согласовать с
ограничениями.

Чистовик 1

Лист 1 из 10

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Задача 1

Тестовик 2
Лист 2 из 10

6; 7; 8; 9 ... последовательность, из кот. необходимо
убрать все квадраты и кубы натуральных чисел

1) квадраты ^{натуральных} чисел:

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49 ... 1936; 2025; 2116; это у нас $1^2; 2^2; 3^2 \dots 44^2; 45^2; 46^2$
соответственно исключим будут все, начиная с 9; т.к. сама
последовательность нач. с 6. Значит исключим 43 числа

2) кубы натуральных чисел:

1; 8; 27; 64; 125; 216 ... 1728; 2197; это у нас $1^3; 2^3; 3^3 \dots 12^3; 13^3$
соотв. исключим все, с 27, по той же причине.
Значит исключим будет 11 кубов.

3) Если бы не пришлось исключать лишние цифры $\Rightarrow$
на 2022 месте оказался бы 2027. Но у нас
число 64 это и квадрат 8 и куб 4; так же число
729 встречается и в квадратах и в кубах $\Rightarrow$

Если ~~добавить~~ учесть их при расчете, то получится

$$2027 + 43 + 11 - 2 = 2079$$

Ответ: 2079

Тестовик 2
Лист 2 из 10

4) Соответственно в интервале от

2022 до 2079 нет числа, кот. было
бы кубом или
квадратом

Задача 4

Тестовик 3
Лист 3 из 10

$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$; преобразуем, получим:

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1 \Rightarrow \cancel{a_{n+1} - 1} = (a_n - 1)^3 = (a_{n-1} - 1)^3 = \dots = (a_1 - 1)^{3^n}, \text{ тогда } a_{n+1} - 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n}; \text{ А значит:}$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} + 1; \text{ тогда так как при } n \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n} \rightarrow 0, \text{ то } \exists n: a_{n+1} \text{ будет меньше}$$

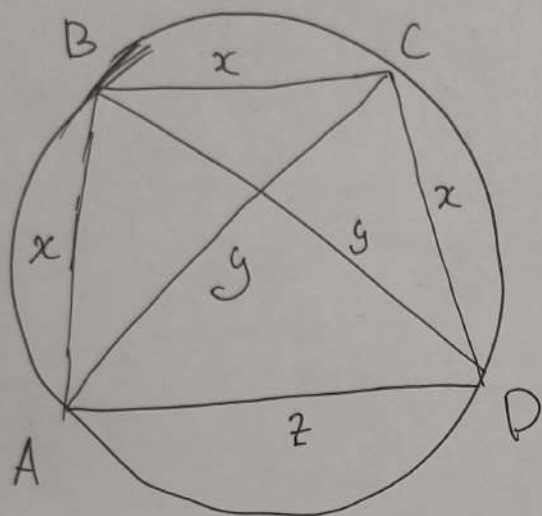
$$\text{любого числа } > 1 \Rightarrow \exists n: |a_n| \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021}$$

Ответ: Да, найдется!

Тестовик 3
Лист 3 из 10

Задача 3

Листовик 4
Лист 4 из 10



1) Из условия можно сделать вывод, что если $AB = BC = CD$; А нам нужен целое и минимально возможное $\Rightarrow$

$$AB = BC = CD = 0; AD = 0 \text{ и тогда } R = 0$$

2) ~~AB=BC=CD=0~~ Пусть $AB = BC = CD = x$;

$$BD = AC = y; AD = z; \text{ где } x, y, z \in \mathbb{N}$$

3) Тогда по теореме Птолемея $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$
Тогда в заданном виде это будет выглядеть так:

$$y^2 = x^2 + x \cdot z$$

4) $P = 3x + z$; если мы будем увеличивать x , то уравнение $P = 3x + z$ будет увеличиваться, значит берем минимальный x ,

Листовик 4
Лист 4 из 10, а именно $x = 1$; тогда из уравнения получим в Зен также получим:

Задача 3 (продолжение)

Листовик 5
Лист 5 из 10

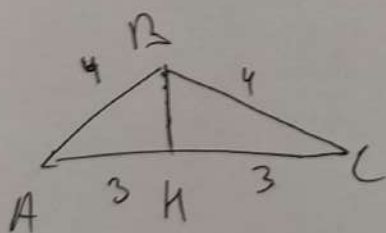
Получим $y^2 = 1 + z \Rightarrow y = 2 \quad z = 3$; но они противоречат условию, что $3x \geq z$
ищем пару, не противоречащую этому.

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \quad y=3 \quad z=8 \\ x=2 \quad y=4 \quad z=6 \\ x=2 \quad y=6 \quad z=5 \end{array} \right\} \text{ не подходят!}$$

$$\boxed{x=4 \quad y=6 \quad z=5} \text{ подходит!}$$

⑤

Для удобства переписали только ~~по условию~~ ^{по условию}:



Пусть $BH \perp AC$, $BH = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = 3\sqrt{7}$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $AB = BC = CD = 4$
 $AD = 5$
 $P_{ABCD} = 17$

$$R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Листовик 5
Лист 5 из 10

Задача 6

Листовки 6
Лист 6 из 10

При $a \in [-48; 12]$ правая часть и левая часть неравенства имеют одну точку $x=3$ т.к.

$$|48+a| + |12-a| = 60, \text{ При данных значениях } a$$

Потому что у графиков есть точка $x=3$, а значит, чтобы у нас получилось решение отрезок длиной 1, то точка должна быть

$$x=2 \text{ или } x=4$$

1) если $x=2$, получаем:

$$|18+a| + |2-a| = 32, \Rightarrow a=8 \text{ или } a=-24$$

$$|100+a| + |36-a| = 96, \Rightarrow \text{нет таких } a \text{ удов. данное уравн.}$$

$$|100+a| \geq 100+a \text{ и } |36-a| \geq 36-a$$

При этих a других решений нет! Можно убедиться в этом методом подстановки $\Rightarrow$

Листовки 6

Лист 6 из 10

Ответ: 8; -24

Зеленовка 1
Август 7 и 10

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

$$2022 - 2022 + 5 + 55 = 2027$$

$$\begin{array}{l} 2^3 \\ 3^2 \\ 3^3 \\ 4^2 \\ 4^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5^2 \\ 5^3 \\ 6^2 \\ 6^3 \\ 7^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8^2 \\ 8^3 \\ 9^2 \\ 9^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10^2 \\ 10^3 \\ 11^2 \\ 11^3 \\ 12^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 13^2 \\ 13^3 \\ 14^2 \\ 14^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 15^2 \\ 15^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline 216 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 2500 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \hline 2500 \end{array}$$

$$2022 + 60 = 2082$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos(40)}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(50)}$$

$$f(1) = -8 + 4 + 18 - 9 = 0$$

$$f(-1) = 8 + 4 - 18 - 9 = -15 \neq 0$$

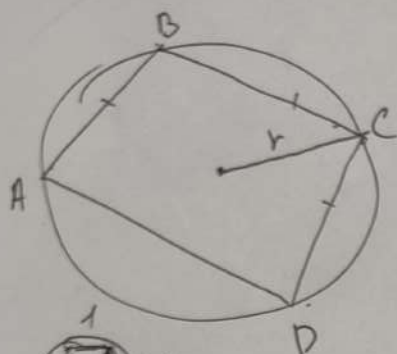
$$f(3) = 8 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 9 = 3(8 \cdot 9 + 4 \cdot 3 - 18 - 3) = 0$$

$$f(-3) = -8 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 9 = -180 \neq 0$$

$$f(5) = 8 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 - 9 = 1000 \neq 0$$

$$\frac{1}{4\cos(40)} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(50)} = \frac{\cos(50) + \sqrt{3}\cos(40)}{4\cos(40)\cos(50)}$$

Зеленовка 1
Август 7 и 10



AB, CD, BC - целые числа

$P \rightarrow O$ $r = ?$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

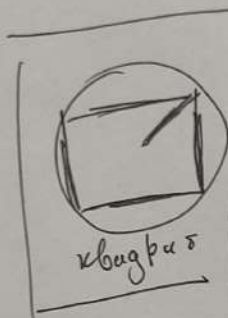
не квадрат!



AB=1



трапеция



квадрат



точно равно, но



$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$a_2 = \left(\frac{4043}{2022}\right)^3 - 3\left(\frac{4043}{2022}\right)^2 + 3\frac{4043}{2022}$$

$$(x^2 + 6x + c)$$

найти число n, при ко- $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = (4x^2-9)(2x+1) = (2x-3)(2x+3)(2x+1)$$

$$\frac{1}{4\cos(40^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos(50^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}\cos(50^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(50^\circ)}{2\cos(40^\circ) \cdot \cos(50^\circ)} = \frac{\sin(30^\circ+50^\circ)}{2\cos(40^\circ)\cos(50^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin(40^\circ)\cos(40^\circ)}{2\cos(40^\circ)\cos(50^\circ)} = \frac{\sin(40^\circ)}{\cos(50^\circ)} = 1 \quad \text{н.т.} \neq 0$$

Треугольник 2

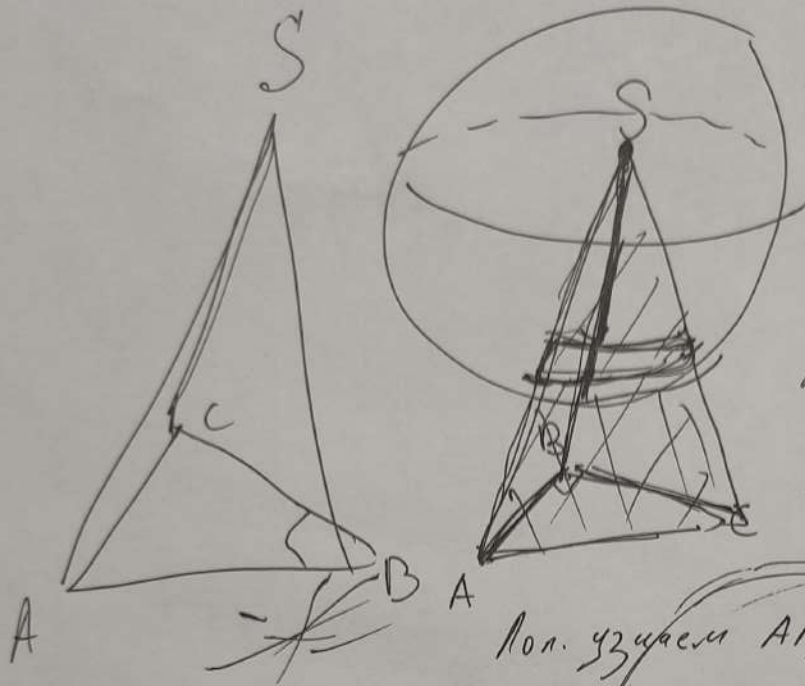
Лист 8 из 10

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1) \leq 0 \quad -1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

Методом интервалов

$$-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 2$$



Тригонометрия 3
Лист 9 из 10

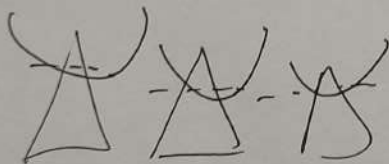
$$SAB \perp SAC$$

$$R = AC$$

$$SA = AB = 2$$

Попр. узнанием AB, BC, AC.

$$AC = R \text{ тогда узнанием}$$



$$ay^2 + by + c$$

Остаток 1243
56

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| <$$

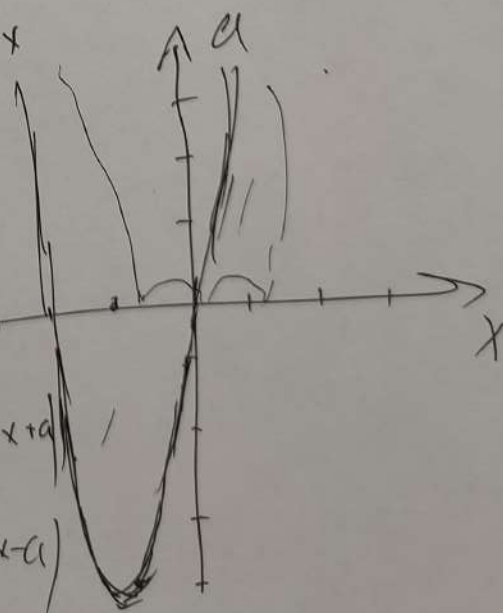
$$4x^3 + 8x$$

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$$

$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a|$$

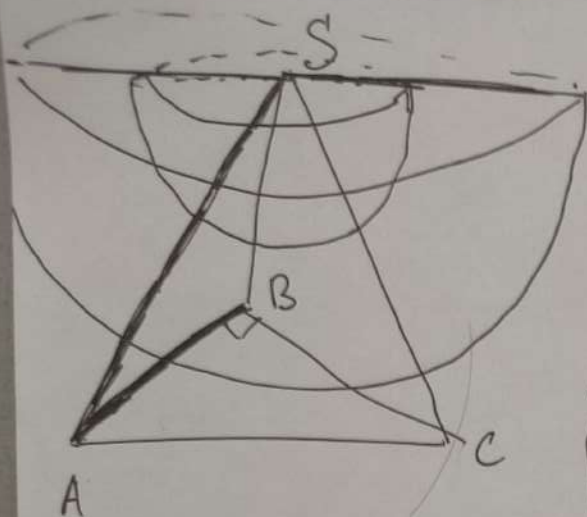
$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| <$$

$$(-x^3 + 2x^2 - x + a) + |x^3 - 2x^2 + x - a|$$



Тригонометрия 3

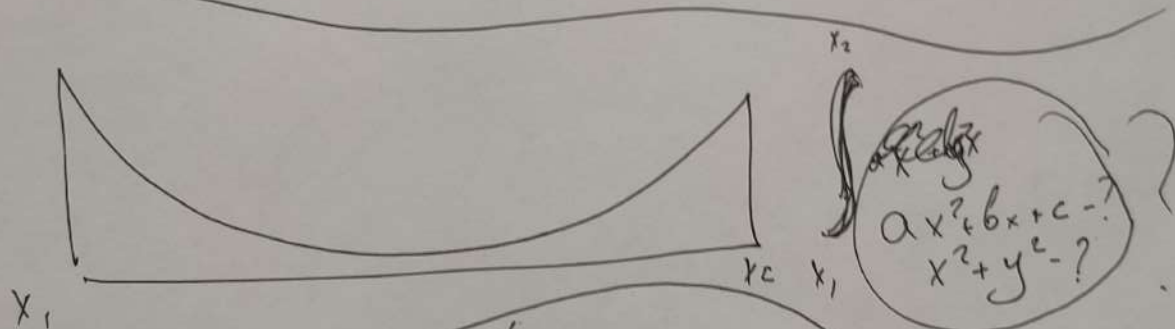
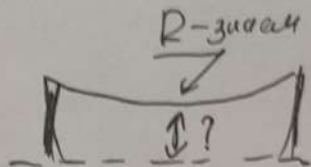
Лист 9 из 10



14:15
окончание

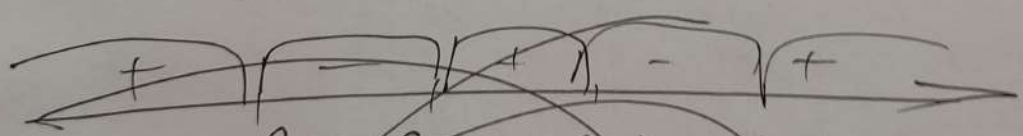
Терновик 4
Лист 104310

$SA = AB = 2$
 $R = AC$



обр.
 $|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| \Rightarrow \dots$
~~...~~

$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$
 $4x^2 + 8x$



$a_1, x_1, a_2, x_2, a_3, x_3$
 $a_1 \geq x(x+1)^2 \quad \text{и} \quad x_1 \geq 1$
 $a_2 \leq x(x-1)^2 \quad \quad \quad x_2 \leq -1$
 $x \leq -1$
 $a \in (-48; 12]$

Терновик 4
Лист 104310