



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чупринова Елизавета Ильинична**

Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Чупринова Елизавета Ильинична

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	10 баллов	0 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Вариант 11-1

N1

Рассмотрим квадраты, кубы и шестые степени натуральных чисел, близкие к 2022: $45^2 = 2025$;

$$46^2 = 2116; 12^3 = 1728; 13^3 = 2197; 2^6 = 64;$$

$$3^6 = 729; 4^6 = 4096.$$

Рассмотрим последовательность 6, 7, 8, 9, 10, ...

На 2022-ом месте 6 и ее формула ~~оказавшись~~ оказывается
число: $6 + 2022 - 1 = 2027$, однако от 6 до 2027

мы теряем $3^2, 4^2, \dots, 45^2, 2^3, 3^3, \dots, 12^3$.

это $43 + 11 = 54$ числа, однако числа 2^6 и 3^6 мы

учитываем дважды (шестая степень и квадрат и куб
одновременно) $\Rightarrow$ всего теряем $54 - 2 = 52$ числа.

Значит на 2022-ом месте окажется $2027 + 52 =$
 $= 2079$; на отрезке $[2027; 2079]$ квадрат и
кубы нет $\Rightarrow$ это и есть ответ.

Ответ: 2079

$$\sqrt{2} \cdot (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$(4x^2(2x+1) - 9(2x+1)) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$$

$$(4x^2 - 9)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ}\right)$$

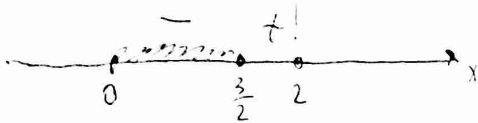
$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$ тогда и только тогда $0 \leq x \leq 2$

$$\begin{cases} 2x-3=0 \\ 2x+3=0 \\ 2x+1=0 \\ \arccos(x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=3 \\ 2x=-3 \\ 2x=-1 \\ x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \rightarrow \text{не подходит по ОДЗ} \\ x=-\frac{3}{2} \rightarrow \text{не подходит по ОДЗ} \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=2 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

N4 $a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n + 1 = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_{n+2} = (a_{n+1} - 1)^3 + 1 = ((a_n - 1)^3 + 1 - 1)^3 + 1 = (a_n - 1)^9 + 1$$

Аналогично $a_{n+3} = (a_n - 1)^{27} + 1$ и т.д. $\Rightarrow a_2 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$
 $a_3 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1 \dots \Rightarrow a_n = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} + 1$

$$\left| \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} + 1 \right| \leq \frac{2022}{2021} \text{ тогда и только тогда } \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$$

тогда и только тогда $3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$ тогда и только

тогда $3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} 2021$ тогда и только тогда $n-1 \geq \log_3 (\log_{\frac{2021}{2022}} 2021)$

$n-1 \geq \log_3 (\log_{\frac{2021}{2022}} 2021)$

~~тогда и только тогда~~

~~тогда и только тогда~~

~~тогда и только тогда~~

№4

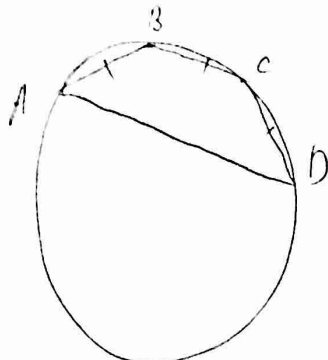
при $n \geq 1 + \log_3 (\log_{\frac{2021}{1021}} 2021)$ тогда

"иначе нет"

при $n = 2 + \lceil \log_3 (\log_{\frac{2021}{1021}} 2021) \rceil$ $|a_n| \leq \frac{2021}{1021}$

как ответ: Да, найдется

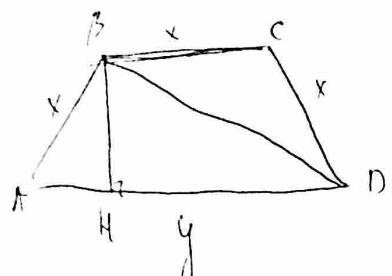
№3



т.к. $AB = BC = CD \Rightarrow \angle A = \angle C$
 (равные хорды стягивают равн. дуги)
 $\angle A = \frac{\angle B + \angle D}{2} = \frac{\angle B + \angle D}{2} = \angle C \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - равнобедренная трапеция с основаниями AD, BC

а) Если BC - меньшее основание: $AB = BC = CD = x$ $AD = y$
 $x, y \in \mathbb{N}, x < y < 3x$



$AH = \frac{y-x}{2} \Rightarrow$ По т. Пифагора в $\triangle ABH$: $BH^2 = x^2 - (\frac{y-x}{2})^2 =$
 $= \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{4}$. В $\triangle BDH$: $DH = y - \frac{y-x}{2} = \frac{y+x}{2}$

По т. Пифагора $BD^2 = (\frac{y+x}{2})^2 + \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{4} = \frac{4x^2 + 4xy}{4} = x^2 + xy \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \sqrt{x^2 + xy} = AC$, BD - диагональ; $x^2 + xy$ - полный кв-т, если

$x=1 \Rightarrow 1 < y < 3 \Rightarrow y=2 \Rightarrow BD = \sqrt{3}$, если $x=1$

если $x=2 \Rightarrow 2 < y < 6 \Rightarrow \sqrt{4+4} < BD < \sqrt{4+12} \Rightarrow BD=3$ (т.к. целый)

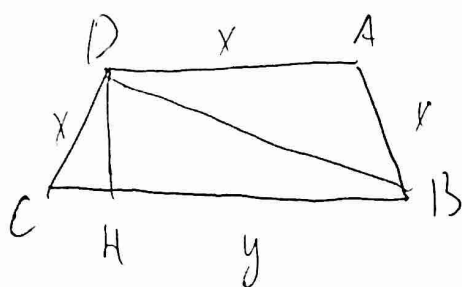
$\Rightarrow 4+2y = 9 \Rightarrow y=2,5$, если $x=3 \Rightarrow 3 < y < 9 \Rightarrow \sqrt{9+9} < BD < \sqrt{9+27}$

4

$\Downarrow BD = 5 \text{ (т.к. } y_{\min} = 5) \Rightarrow y + 3y = 25 \Rightarrow y = \frac{16}{3} \text{, не } \emptyset$ | проверка |

Если $x = 4$, $\Rightarrow y > 4$, $y_{\min} = 5$, тогда $BD = 6$ — тоже,
в таком случае $P_{\min}$, т.к. при увеличении x увеличивается
 y и P . $P = 3(4 + 5) = (17)$

б) Если AD — меньшая основа



$$CH = \frac{x-y}{2} \Rightarrow DH^2 = x^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{4}$$

$$BH = x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow BD^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + DH^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{x^2 + xy}, \quad 0 < y < x \Rightarrow x \geq 2:$$

$$x = 2; y = 1 \Rightarrow BD = \sqrt{6} \text{ } \emptyset$$

$$x = 3:$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \sqrt{12} \text{ } \emptyset \\ BD = \sqrt{15} \text{ } \emptyset \end{cases} \text{ КР}$$

при $x = 4$:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \sqrt{20} \text{ } \emptyset \\ BD = \sqrt{23} \text{ } \emptyset \\ BC = \sqrt{28} \text{ } \emptyset \end{cases}$$

1) при $x = 5$:

условие

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

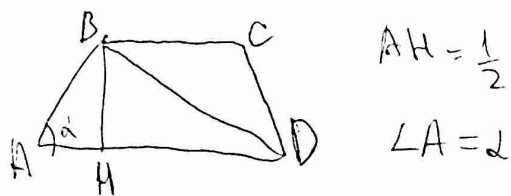
$$\begin{cases} BD = \sqrt{30} \neq \\ BD = \sqrt{35} \neq \\ BD = \sqrt{40} \neq \\ BD = \sqrt{45} \neq \end{cases};$$

1) при $x \geq 6 \Rightarrow 3x \geq 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не выполняется

Если $x = y$, ABCD - квадрат $\Rightarrow$ диагональ $x\sqrt{2}$ - не целое.

Удлиняем сторону $AB = 4$; $BC = 4$; $CD = 4$; $AD = 5$



$$BH = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \Rightarrow 2R =$$

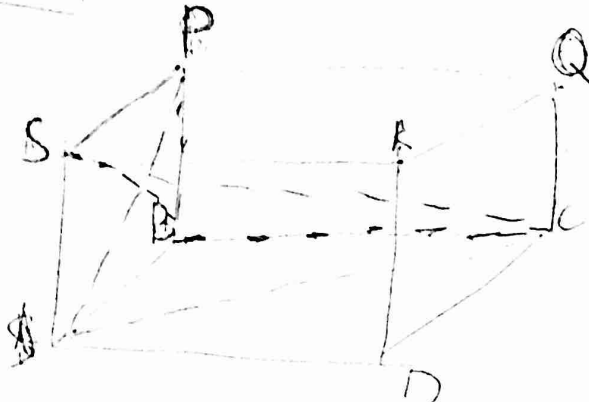
$$= \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{16}{\sqrt{7}} \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

N5

Стереометрия

16



$$(SAB) \perp (ABC), (SAC) \perp (ABC), \angle ABC = 90^\circ$$

$SA = AB = BC = 2 \rightarrow$ $SABC$ - часть куба $SABCDPQR$
 пирамиды $SABC$ и $SACD$ - симметричны относительно
 м-та $(ACQS)$ сфера с центром S и $R: AC = 2\sqrt{2}$
 диаметр сферы, поэтому сфера
 пересекает пирамиду ровно.

Пирам. $SABCD$, $NDKQC$ и $SPQCS$ равны, поэтому
 сфера пересекает пирамиду в центре S и этих
 3-х пирамид равны. вместе эти 3 пирамиды

образуют куб $ABCDPQRS$; сфера пересекает куб
 с центром S , $R = 2\sqrt{2}$ куба - это

сфера куба ~~за пределами~~ ~~внутри~~ ~~внутри~~ куба,
 между касат. CB, CD, CQ . Объем $V_{куба} = \text{полный}$,
 вычитаем $V_{куба}$. Это объем пирамиды $CBPQ$ - $V_{куба}$ ~~составляет~~
 ограниченного м-та (DBQ) .

[10.000000] 1.4

Объем пирамиды = $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2 =$
 $= \frac{4}{3}$, расстояние от S до ABQ

$-\frac{2}{3}$ - площадь куба, то есть $\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} =$
 $= \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Умножив $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ на $\int_{2\sqrt{2}}^{-\frac{4\sqrt{2}}{3}} ((2\sqrt{2})^2 - x^2) dx$

 $= \pi \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3} \right) + \frac{64\sqrt{3}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{3}$
 Умножив на $\sqrt{2}$.