



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Носков Владимир Юрьевич**

Класс: **7-8**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Носков Владимир Юрьевич

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Черновик

~2 $v = \frac{s}{t}, [v] = \text{м/с}, [t] = \text{сек}, [s] = \text{м}$

n - количество параметров

~~$10 \cdot 1 = 10v$~~

$n \cdot v \cdot 1 \cdot n v = 10$

$\left\{ \begin{aligned} 7 \cdot v \cdot \frac{1}{2} + n v = ? \end{aligned} \right.$

$7 \cdot v \cdot \frac{1}{2} + n v =$

3,5

$3,5 v + n v = ?$

~3

a

$[100a + 10b + (-100a - 10c - b)] \cdot 12$

$9b - 9c \equiv 0 \pmod{12}$

$9(b-c) \equiv 0 \pmod{12}$
 $\underbrace{9(b-c)}_{\text{делится}} \cdot \underbrace{8}_{b-c:8}$

Для (b, c) : каждому b можно поставить остаток от деления

~~$b=1, c=9$~~ $b+8$ на 10, а также сам b , т.к. $b-b=0$,

0-8. Тогда получается 9 вариантов на

место a , 10 на место b и по 2 на каждый b вариантов для

c . Получаем $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ чисел.

$$\overline{abc} - \overline{acb} = \overline{bc} - \overline{cb}$$

жедемся на 9 , если

$$1) \overline{bc} - \overline{cb} = 9, \Leftrightarrow \overline{c-b+8} \quad b = c + 8$$

$$2) \overline{bc} - \overline{cb} = 0 \Leftrightarrow b = c$$

$$3) \overline{bc} - \overline{cb} = -9, \Leftrightarrow c = b + 8$$

$b \leq 9$, $c \leq 9$, тогда b может быть для первого

условия 8 или 9 и c может быть 0 или 1 , а

b , следовательно, 0 или 1 . Тогда для $b \in S$, где S —

множество чисел $0, 1, 8$ и 9 , существует по два допустимых значения c (задающие условия 1 или 3, а также условия 2, т.е. $c = b$). Для других 6 значений b (2, 3, 5, 6, 7) существуют

по одному значению. Тогда упорядоченных пар b, c , т.е. чисел $\overline{bc}$ существует $6 + 5 \cdot 2 = 15$. Число a может принимать

значения от 19 до 9 , т.е. 9 значений. Тогда чисел $\overline{abc}$ существует $6 \cdot 9 = 54$ чисел.

3

x

Углубление

Оценка: если x - натуральное, минимальное значение
выражения равно $(y+1)(y+2) + 2y = 100$, т.е.

$$y^2 + 5y + 2 = 100.$$

Оценка: найдем g границы сверху для y . Из-за минимальности
 $2y$ она не больше 10, а из-за y минимальности $(y+1)(y+2)$
 $(x+y+1)(x+y)$ при $\min(x) = 1$, т.к. $2 \in \mathbb{N}$ по условию,
минимальное, равное $(y+1)(y+2) = y^2 + 3y + 2$, дает границу в

~~минимуме~~ $[y+1]$, где $[n]$ - округление вниз, а

y_+ - положительный корень квадратного уравнения от y ,

$$D_y = 25 - 8 = 17, \quad y_+ = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \text{ равно } y^2 + 3y - 28 \text{ (т.к. } y^2 + 5y$$

$$\max(y^2 + 3y + 2) = 100, \quad \max(y^2 + 3y - 28) = 0$$

$$D_y = 9 + 372 = 381 \approx 3 \cdot 127 = 381$$

Чепухов

4)

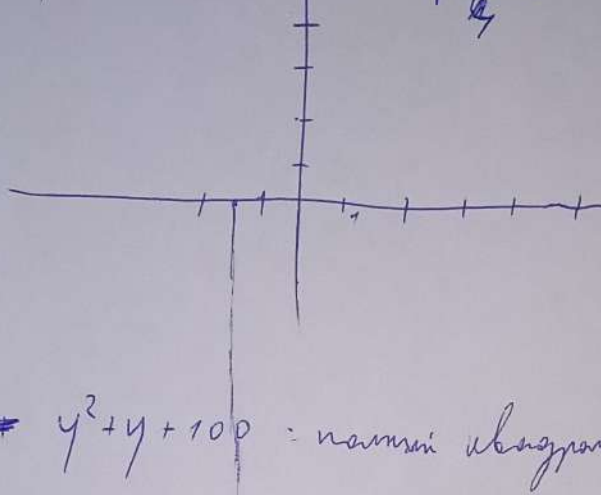
$$y^2 + 3y + 28 =$$

$$\sqrt{100,25} =$$

$$(y + 1,5)^2 - 100,25$$

$$\sqrt{\frac{401}{4}} =$$

$$\frac{\sqrt{401}}{2} \Rightarrow \frac{20}{2} \geq 10,$$



Итого берем границу

$$\text{где } y = \lfloor 10 - 1,5 \rfloor,$$

$$\lfloor 8,5 \rfloor = 8$$

$$(2y + 3)^2 = y^2 + y + 100 = \text{наименьшее значение}$$

$$4y^2 + 12y + 9 - y^2 - y + 100 = (8 + 1)(8 + 1) + 1 \cdot 8 = 106$$

$$3y^2 + 11y + 100 = \text{наименьшее значение } y \leq 8$$

333

$$49 + 336 = 425 = 5 \cdot 85 = 5 \cdot 5 \cdot 17 = (5\sqrt{17})^2$$

$$1) \quad (x+2)(x+2) + 2x = 100$$

$$2) \quad (x+2)(x+3) + 2x = 100$$

$$3) \quad (x+3)(x+3) + 2x = 100$$

$$4) \quad (x+3)(x+5) + 2x = 100$$

$$5) \quad (x+5)(x+5) + 2x = 100$$

$$6) \quad x^2 + 13x - 70 = 0$$

7)

$$x^2 + 9x = 88 \cdot 0$$

$$81 + 332 =$$

$$513 =$$

$$160 + 280 =$$

$$7 \cdot 59 \text{ упр.}$$

5

Числа

$$\min(x) = 2$$

$$(y+1)(y+2) + 1y = 100$$

$$11 \cdot 12 > 100$$

$$10 \cdot 11 > 100$$

$$9 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \geq 106 > 100$$

$$8 \cdot 9 + 2 \cdot 9 = 86 < 100$$

$$x(x+11) = 100 - 5 \cdot 8$$

$$4 \cdot 15 - \text{га?}$$

$$20 - 5 - \text{не } (x+9) = 100 - 28$$

$$72 = x(x+9)$$

$$y \leq x \leq 7 \quad 8 \cdot 9 \text{ или } 2^5 \cdot 3^2 = x(x+9) - \text{разнозначные}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \text{ не разное}$$

$$x(x+9) = 100 - y(y+5)$$

$$(x+y+11)(x+y) + 1y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y = 100$$

$$x(x+9) = 100 - 3 \cdot 6$$

$$x(x+9) = 82 = 2 \cdot 41$$

$$x^2 + 9 + 6x + x + 9 = 100 = 0 \quad \text{не разное}$$

Подставляем значения y

$$x^2 + 2x + 1 + x + 3 = x^2 + 3x + 5 = 100$$

$$x^2 + 4x = 82$$

$$x^2 + 3 + 5x + 9 = 100 \quad x^2 + 3x - 96 = 0$$

$$x(x+9) = 82$$

$$x(x+5) = 90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \quad x^2 + 5x = 96$$

$$96 = 16 \cdot 6$$

разные слагаемые на сумму, разное

$$x(x+3) = 96$$

$$2^5 \cdot 3 =$$

$$12 \cdot 8 =$$

$$9 \cdot 10$$

$$18 \cdot 5$$

$$45 \cdot 2$$

разные слагаемые, м.е.

$$32 \cdot 3, \text{ не разное}$$

не разное

Условие

68

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 2y = 100$$

вопрос:

$$x(x+2y+1) = 100 - y(y+3)$$

или мы возьмем числа

с максимальным количеством
или другим образом $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

и первое число x другим числом,

от 1 до 99 чисел. максимум

или чисел - 5,

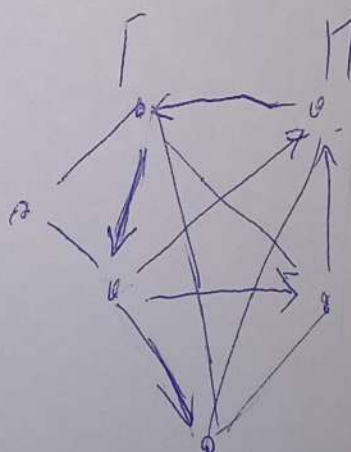
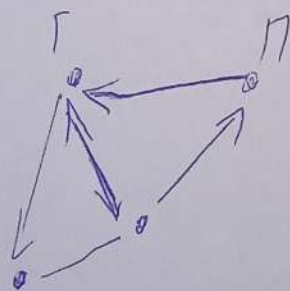
крате пер. строке

от 1 до 6 чисел



$$\sum d(f, v) = 2|E|$$

Условие: $8000 \leq 99$, и всего норматив 4000
8000 4000 норматив



13 Условие
Предобразует уравнение из условия:

$$(x+y+1)(x+2y) + 2y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 2y = 100$$

$$x(x+2y+1) + y^2 + 3y = 100$$

$$x(x+2y+1) = 100 - y(y+3)$$

Переберём значения y от $y=1$ до уратимся сверху $y=7$. Распадающая правую часть на простые множители и обратная вниманья на повторяющиеся делители и делители множителей в левой части, можем начать полагать $y=1$:

$$x(x+3) = 100 - 4$$

$$x(x+3) = 2^5 \cdot 3$$

↑ ↑

разные делители на 2, один содержит 2^5 .

варианты: $32 \cdot 3, 32 \cdot 3 \neq 8$
 $16 \cdot 1, 16 \cdot 1 \neq 3$

$y=3$:

$$x(x+4) = 100 - 18$$

$$x(x+4) = 2 \cdot 51, 51 - 2 \neq 7$$

$$82 \cdot 1, 82 - 1 \neq 2$$

$$x(x+5) = 100 - 10$$

$$x(x+5) = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$$

↑ ↑

разные делители ~~возможны~~ на 3, все варианты в одном множителе

варианты: $9 \cdot 10, 9 \cdot 10 \neq 5$,

$18 \cdot 5, 18 \cdot 5 \neq 5$,

$55 \cdot 2, 55 \cdot 2 \neq 43$,

$20 \cdot 1, 20 \cdot 1 \neq 5$

$y=5$:

$$x(x+9) = 100 - 28$$

$$x(x+9) = 2^3 \cdot 3^2$$

↑ ↑

разные делители на 3, все варианты в одном множителе.

варианты: $8 \cdot 9, 8 \cdot 9 \neq 9$,

$24 \cdot 3, 24 \cdot 3 \neq 9$

$72 \cdot 1, 72 \cdot 1 \neq 9$

$$y = 5$$

$$x(x+11) = 100 - 5 \cdot 8$$

$$x(x+11) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3$$

разность чисел, образующих: $(4, 15, 15-4=11)$

добавим в сумму

$$20 \cdot 3, 20-3 \neq 11,$$

$$12 \cdot 5, 12-5 \neq 11$$

$$60 \cdot 1, 60-1 \neq 11$$

$$y = 6$$

$$x(x+13) = 100 - 54$$

$$x(x+13) = 2 \cdot 23, 23-2 \neq 13$$

$$55 \cdot 2, 55-2 \neq 13$$

$$y = 7,$$

$$x(x+15) = 100 - 7 \cdot 10$$

$$x(x+15) = 2 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\text{образующие: } 15 \cdot 2, 15-2 \neq 15$$

$$30 \cdot 1, 30-1 \neq 15$$

$$3 \cdot 10, 10-3 \neq 15$$

$$6 \cdot 5, 6-5 \neq 15$$

Единственным парой является $x=3, y=5$.

Проверим:

$$3 \cdot 10 + 10 = 100$$

$$100 = 100$$

$$\text{Ответ: } x=3, y=5$$

26

Ответ: если во время путешествия он встретится на уже посещенном месте, ему будут платить не 100, а 1000, то и при первом посещении, а значит, он не посетит места главы. Тогда $x \leq 0$. Крайнейший пункт будет: Иерусалим, прямо на Палестину, т.е. один пункт.

15 Тогда $1 \leq \text{примков} \leq 99$ ^{Учитывая}

Расставим планеты в виде кольца так, чтобы ~~соседней~~ соседней планетой B был планета на соседней ~~соседней~~ по часовой стрелке планете C , и с соседней против часовой A тоже был планета. Нетрудно доказать, что это возможно, ~~сделав~~ если предположить, что понав на 52 планету при обходе всех планет по кольцу, мы получим с ней планету лишь на предпоследней до 51 планете, то с 52 будет планета на соседней, и ~~на 50~~ ~~мы с ней не понадем~~ даже если есть планета с ней на планетах 3-51, то лишь 50, а не 1 мы не будем как и на 52 т.е. C не будет планета на 2.

Но ~~периметр~~ $\sum d + f(V) = 2|F|$, где $d + f(V)$ - кол-во ~~соседей~~ планет с группами, получим, что ~~все~~ ~~примков~~ 5000.

~~Если~~ ~~иначе~~ Но как мы рассматриваем варианты, то мы можем рассматривать планету как неограниченную. Тогда WZ эта планета-точка на окружности мы сможем построить любой n -угольник с $3 \leq n \leq 100$. Тогда если мы возьмем ребро между Талатей и Пандорой, мы можем сделать $n-1$ примков с Талатей до Пандоры по n -угольнику. Тогда ~~верх~~ ~~более~~ кол-во примков от 2 до 99 достижимо как карманом, а также ~~Трех~~ ~~примков~~. Тогда ~~мисеры~~ ~~Панду~~ ~~посредства~~ от 1 до 99 примков, где все целые кол-ва достижимы.

Ответ: ~~более~~ ~~целое~~ ~~число~~ примков с ~~отрезка~~ от 1 до 99 ~~выполнимы~~

$$(h + 3,5)V = x$$

h - ~~узел~~, a - ~~узел~~, V - ~~узел~~.

$$7xV = nV \quad x = \frac{n}{7}$$

$$nV + \frac{n}{2}V = x$$

$$\left(h + \frac{n}{2}\right)V = x \quad n=7$$

$$(7+x)V + 3,5V$$

$$\begin{cases} (10,5+x)V = 1 \\ (7+x)V = 10 \end{cases}$$

$$10,5+x \cdot \frac{10}{7+x} = 1$$

$$\frac{10}{7+x} = V$$

$$\frac{10,5 + 10x}{7+x} = 1$$

$$x > 0$$

$$x = 3,5$$

$$\frac{3,5}{7+x} - \text{узел}$$

$$\frac{3,5}{7+x} - \text{узел} \frac{3,5}{7+x} + 10 = 1$$

Условие

1.2

1.2

Обозначим произвольным образом как V , а число пробов как $7+x$, а число уроков - как C . Получим:

$$\begin{cases} (7+x)V = 10 \Rightarrow \cancel{7+x} V = \frac{10}{7+x} \\ C - \text{целое число} \\ (7+x)V + \frac{1}{2}V = C \end{cases}$$

Получим:

$$10 + \frac{35}{7+x} = C$$

Если C - целое, то и $\frac{35}{7+x}$ - целое. x - какое целое, знаем,

$7+x \mid 35$. Получим $x=0$ или $x=28$. Из условия $x \neq 0$,

знаем, $x=28$. Получим $35V=10$, $V=\frac{2}{7}$, а C считаем как

$$10 + \frac{35}{35} = C, \quad C=11 \text{ уроков.}$$

Ответ: 11 уроков

Условия:

Даны два утверждения:

- 1) "Нет таких чисел, которые собрали Лананов Ланне, чем 3" (1)
 - 2) "Хотя бы у семи чисел кокосов Ланне, чем у меня" (2)
- А также в условии сказано, что:

"Оказалось, что количество собранных Лананов и количество собранных кокосов у всех разные" (3)

В условии приведена моя нумерованная утверждений для удобства рассмотрим количества собранных фруктов как две упорядоченные последовательности (и будем использовать как обозначение количества чисел аитрова).

1. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, где a_k - кол-во Лананов у k -того числа
2. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, где b_k - кол-во кокосов у k -того числа.

Последовательности упорядочены по возрастанию.

Рассмотрим утверждение 1;

~~$n-5$ -тый~~

~~Взяв из a , i -ый ~~первый~~ номер рыцаря, он даст инфор-
мацию, что $n \leq 6$, т.к. все следующие члены последовательности
Ланне (а не равны, см. утв 3), то есть все не Ланне сами.
Погда от, как и a_{15} рыцари.~~

8 Возвращаемся к ^{теореме} n -тому номеру. Максимальное количество друзей равно a_n и b_n , а a_n , будучи минимальным последовательным, является другим, но если он — рыцарь у $n-1$ -ого, $n-2$ -ого и до $n-5$ -ого номера найдется не больше пяти номеров с таким же количеством друзей (у k -того номера это $k+1$ -ый, $k+2$ -ой и до n -ого номера). Но из-за того, что из умв. 3 количество друзей разное, для $n-6$ -ого номера найдется ≥ 6 номеров, у которых столько же друзей. В таком случае для $n \leq 6$ на острове n рыцарей, для $n > 6$ — минимум $n-5$ рыцарей (следствие 1).
Обратимся к утверждению 2:

Для $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_{n-6}$ не найдется 7 номеров последовательных с таким же числом друзей (концов), т.е. оно равно количеству чисел между k и $n+1$ для k -того номера, т.е. $(n+1) - k - 1 = (n-k)$. Тогда они будут рыцарями, и для $n \leq 7$ на острове n рыцарей, а при $n > 7$ — минимум 7 рыцарей (следствие 2).

Воспользовавшись утверждениями 1 и 2 и введенными следствиями 1 и 2, мы можем построить цепочку вперемешку, где слева будут рыцари, а справа — концы. Заметим, что при $n \leq 7$ получается противоречие следствиям, а значит, так как у нас точно есть рыцари и рыцари из следствия 1, у нас есть минимум 6 рыцарей и 7 концев. При наименьшем количестве рыцарей n все равно будет больше 6, что гарантирует наличие минимум 6 рыцарей. Но как рыцари не могут

2. Если человек, а ^{человек} человек при $n \leq 2$ будет n , обозначается еще 6 человек, человек Но тогда $n = 22$ и человек, а так $n = 23$. Неправильно чертеть.

P P P P P P ... Л Л Л Л Л Л Л

~~Так как утверждения 1 и 2 относятся к одним людям
другим и разным, а противоречия следствий 1 и 2 не
добиваясь, мы не можем знать, кто стоит между 6 рыцаря-
ми и 9 лжецами, но, из-за истинности утверждений и след-
ствий, можно сделать вывод, что ограничения на~~

Если между 6 рыцарей и 2 лжецов стоит хотя бы один
рыцарь, он утверждает утв 1, но 6 рыцарей, ~~до~~ одного
 a_n, a_{n-1} и a_{n-2} от лжецов, подводят под 6 человек из
утв. 1. Если между 6 рыц. и 2 лж. стоит лжец, то он утв
утв. 2, но 2 лжецов имеют $b_n - b_{n-6}$ концов, что должно
быть b_k , где $k < n-5$. Тогда между 6 рыцарями и 2 лжецами
никогда должно быть нет.

~~Ответ: 13 человек, 6 рыцарей и 2 лжеца. Условие, подводящее~~

~~для 6~~ Ответ: единственная подводящая для ситуации из
условия ситуация - на острове 13 человек, из них 6 лжецов
и 6 рыцарей.

$$\sim 3 \quad \overline{abc} - \overline{acb} = \overline{bc} - \overline{cb}$$

$$\overline{bc} > 0, \quad \overline{cb} > 0$$

$$\overline{bc} < 100, \quad \overline{cb} < 100 \Rightarrow -\overline{cb}$$

$$0 \leq \overline{bc} < 100,$$

$$0 \leq \overline{cb} < 100 \Leftrightarrow \overline{cb} - 100 < -\overline{cb} \leq 0,$$

$$-100 < \overline{bc} + (-\overline{cb}) < 100, \text{ m.e.k.}$$

$$(\overline{bc} - \overline{cb}) : 92 \text{ b } 3 \text{ wyrazu.}$$

$$1) \overline{bc} - \overline{cb} = 92 \Leftrightarrow 10b + c - 10c - 9b = 92 \Leftrightarrow 9(b - c) = 92 \quad (1)$$

$$2) \overline{bc} - \overline{cb} = 0 \Leftrightarrow \overline{bc} = \overline{cb}, \quad b = c \quad (2)$$

$$3) \overline{bc} - \overline{cb} = -92 \Leftrightarrow 9(b - c) = -92$$

Уз 2 следуют, что для любых b и c max минимума равно c , $c = b$.

Уз 1 следуют, что $b - c = 8$, $b = c + 8$. Ил. к. $b \leq 9$, поэтому
тогда найм $(b, c) = (1, 9)$ и $(0, 8)$.

Уз 3 следуют, что $b - c = -8$, $b = c - 8$, $c = 8 + b$. Ил. к. $c \leq 9$, поэтому
тогда найм $b = 1$, $c = 9$ и $b = 0$, $c = 8$.

11

Условие
 Тогда условием пары $b = a$, $a < b$
 будет обозначена пара $c = d$

$\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 5, 4 \rangle$, $\langle 8, 8 \rangle$, $\langle 1, 9 \rangle$;
 $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle 5, 5 \rangle$, $\langle 9, 9 \rangle$, $\langle 9, 1 \rangle$;
 $\langle 2, 2 \rangle$, $\langle 6, 6 \rangle$, $\langle 0, 8 \rangle$;
 $\langle 3, 3 \rangle$, $\langle 4, 4 \rangle$, $\langle 8, 0 \rangle$;

Несколько и несимметрично из. Из за симметричного ограничения на b , оно равно $0 \leq b \leq 9$, есть 10 возможных значений b . У нас 10 пар вида $\langle b, b \rangle$ и 5 пар из выражений, у нас 10 $75 = 14$, а приписав значения от 1 до 9, у нас 9 значений. Тогда как-то еще abc считается как $6 \cdot 14 = 84$

Пример: 84

и 4. Означим, что из условия ~~следует~~ 0 нам, что x и y — натуральные, $\min(x) = \min(y) = 1$.

Положим $x = \min(x) = 1$:

$$(y+1)(y+2)+2y=200$$

Оценим $\max(y)$. Положим из условия $2y$ она

$\max(y) = 50$, но это убыток оценки. Положим $y=20$,

найдем $12 \cdot 11 > 10 \cdot 10$, а $10 \cdot 20 = 200$.

Для $y=9$ найдем $10 \cdot 11 > 10 \cdot 10$. При $y=8$ выразим x из

$$9 \cdot 10 + 16 = 200$$

$106 \geq 200$, что неверно. При $y=2$:

$$8 \cdot 9 + 14 = 200. \quad 86 < 200, \text{ а знаем, } y=9 \text{ нам}$$

не подходит при данном x . Тогда убыток берем вправо

для y ($\max(y)$) равна 9. Из-за симметрии она максимальна и для x .