



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хатымов Ренат Рустемович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Хатымов Ренат Рустемович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.



2

не пробник.

орб. X

2, 3, 5

#KB [0, x] - a

17.6.2022

#myb [0, x] - b

$$x-5-(1+0+0)=2022$$

+ 0 or [0, x] - c

$$x-5^* [\sqrt{x}] + [\sqrt[3]{x}] - 3 + [\sqrt{x}]$$

$$15^3 = 225^2 = 2100$$

$$x-3 - [\sqrt{x}] - [\sqrt[3]{x}] + [\sqrt{x}]$$

$$74^3 = 8.343$$

$$= 2022$$

$$45^2, 73^3$$

$$2080^3 = (45+73)+3$$

$$2022 + 58 = 2080$$

$$2080 - 3 = (73+73)+3$$

$$45^2 = 2025$$

$$2080 - 45 - 72 + 3 =$$

$$45^2 = 529.4 = 2700$$

$$= 2080 - 54 = 2026$$

$$9(8.3+4-6-7)$$

N 2

$$(8x^3 + 4x^2 - 78x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 50^\circ \sin 20^\circ + \sin 50^\circ \cos 40^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} = 1$$



7

Решение.

$$x-1 = \cos 2$$

$$-50x + 28$$

$$8x^3 + 4x^2 - 78x - 9 = 8(x-1)^3 + 28x^2 - 42x - 9 =$$

$$= 8 \cos^3 2 + 28 \cos^2 2 + 74 \cos 2$$

$$8(x-1)^3 + 28(x-1)^2 + 74(x-1) - 75$$

$$8 \cos^3 2 + 28 \cos^2 2 + 74 \cos 2 - 75$$

$$2(4 \cos^3 2 - 3 \cos 2) + 74(2 \cos^2 2 - 1) + 74 \cos 2 - 75$$

$$8x^3 + 4x^2 - 78x - 9 =$$

$$\frac{3}{2} \quad 27 + 9 - 27 - 9$$

$$\frac{-4 \pm 2}{4}$$

$$8x^3 + 4x^2 - 78x - 9 = (x-3)(4x^2 + 8x + 3)$$

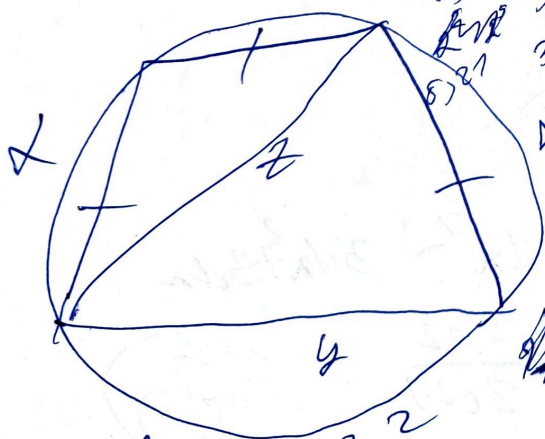
$$f = x(x+y)$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \cos 2 \leq$$

N 3

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$



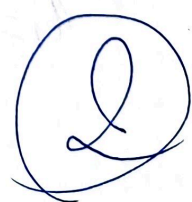
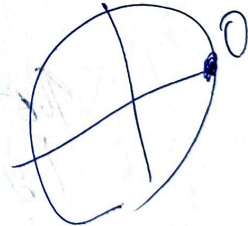
$$x^2 + y^2 = 2z$$

$$\min(x+y+z)$$

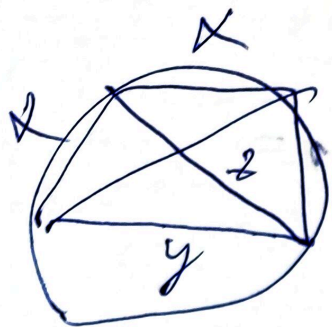
$$x^2 + 2 \leq y^2$$

$$x^2 + y^2 \geq 2(x+y)$$

$$x^2 + y^2 \geq 2(x+y)$$



непрям



$$x^2 + xy = z^2$$

$$x(x+y) = z^2$$

$$1, 1+3, 2^2$$

$$1, 1+8, 3$$

$$2, 2+5, 4$$

$$4, 4+5, 6$$

$$4, 5, 0$$

$$3x+y=74$$

$$\sqrt{(2x+4)z^2}$$

$$\sqrt{x^3 + 2x^2 + x + a}$$

$$3x+5$$

$$+ \sqrt{x^3 - 2x^2 + x - a} \leq 4x^2 + 8x + (2x)^2 \quad xy = (z+1)(2x)$$

$$\sqrt{x(x+1)^2 + a} + \sqrt{x(x-1)^2 + a}$$

то

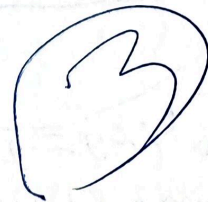
$$|y-z| + |y+z| \leq 4x^2 + 8x$$

N 4

$$a_1 = \frac{4843}{2022}$$

$$dn+r = dn^3 - 3dn^2 + 3dn$$

$$|dn| \leq \frac{2022}{2027}$$



непробук

$$d_7 = \frac{4043}{2022}, \quad d_{n+7} = d_n^3 - 3d_n^2 + 3d_n$$

$$x(x+1)^2 > a$$

$$x(x-1)^2 > a$$

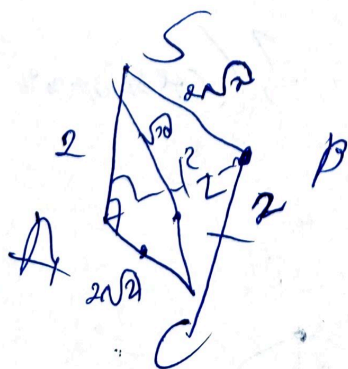
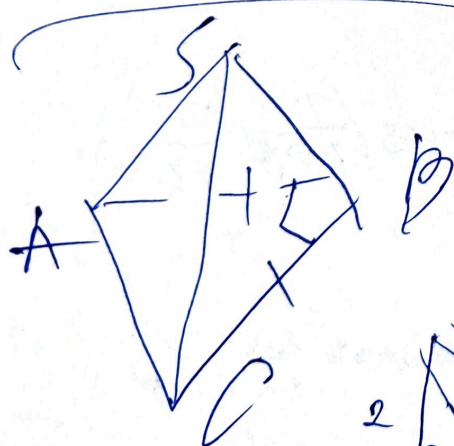
$$2x(x+1)^2 < 4x^2 \cdot 8x$$

$$2x(x-2x-3) < 0$$

$$2x(x-2)(x-1) < 0 \quad b_{n+1} = d_n^3$$

$$b_7 = \frac{2027}{2022}$$

$$\left(\frac{2027}{2022}\right)^{3K} \leq \frac{2022-7}{2027}$$



Sub.

$$\frac{(1+x)^n}{(1+x)^{n-7}} = \frac{(1+x)^n}{1+x^{n-7}}$$

4

Методом.

$$(x^3 + 2x^2 + x + a) + (x^3 - 2x^2 + x - a) < x^3 + 8x$$

$$4 + (x(x+1)^2 + a) + (x(x-1)^2 - a) < 4(x+1)^2$$

$$2x(x^2) < 4(x+1)^2$$

$$x^3 + x < 2x^2 + 4x + 2$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x+2)(x^2 - 3x + 1)$$

$$x(x+1)^2 - x(x-1)^2 = x \cdot 4x$$

$$(x+2)(x+1) < 4$$

$$2|a| < 4(x+1)^2$$

$$2|a| < 4$$

$$(x+1)^2 < (2x+1)^2$$

$$2x^2 + 4x + 1 > 3x^2 + 1$$

$$4 + a + 1 < 4$$

$$2 - a + 1 > 8 + a$$

5

Учреждение.

Вариант 77-1.

N 2

$$(8x^3 + 4x^2 - 78x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right);$$

$$\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\sin 40^\circ \cdot 2 + \cos 40^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\sin 40^\circ \sin 20^\circ + \cos 40^\circ \cos 30^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin 80^\circ}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}\right) = \arccos(1) = 0$$

$$8x^3 + 4x^2 - 78x - 9 = (2x-3)(4x^2+8x+3) = (2x-3)(2x+3)(2x+1).$$

Тогда исходное неравенство будет:

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq 0;$$

Область: $-1 \leq x-1 \leq 1$, т.к. функция $\arccos$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x \in [0, 2]$$

(т.к. $\arccos$ нечетная)

$$\begin{array}{ccc} (2x-3) & (2x+3) & (2x+1) \\ \nearrow -3 & \nearrow 3 & \nearrow 1 \\ \leq 1 & & \end{array} \quad \arccos(x-1) \leq 0;$$

≥ 0 , т.к. $\arccos$ принимает значения от 0 до π

$$(2x-3) \arccos(x-1) \leq 0;$$

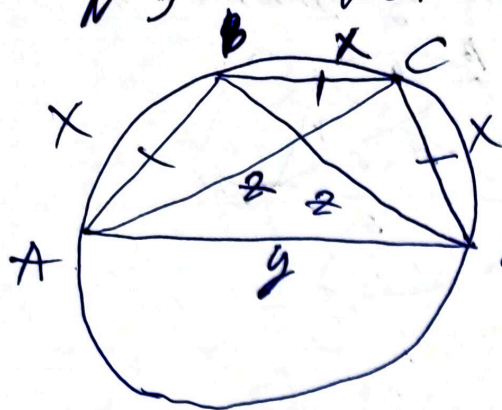
$$\left[\begin{array}{l} \arccos(x-1) = 0, \\ 2x-3 \leq 0; \\ x-1 = 1, \\ x \leq \frac{3}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x \leq \frac{3}{2}. \end{array} \right. \quad \text{Синхронизация: } [0, \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

$$\text{Ответ: } [0, \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

1

N 3 Условие.



Т.к. четырехугольник $ABCD$, то он вписанный, значит противоположные углы на прямые. $AB = CD \Rightarrow BC \parallel AD$ и $APCB$ — равнобедренная трапеция, значит $AC = BD = y$, т.к. это ее диагонали.

Периметр $APCB = 3x + y$

(1) $\min(3x + y) = 17$

Т. применяя для $APCB$:

$BC \cdot AD + AP \cdot CB = AC \cdot BE$

$x \cdot y + x^2 = z^2$

$x(x+y) = z^2$

$\begin{cases} AB = BC = CD = x, \\ AD = y, \\ AC = BD = z. \end{cases}$

$x, y, z \in \mathbb{Z}$, а значит они натуральные

Передер: $x(x+y) = z^2$

1) $x=1$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 57 \cdot 58 \cdot 59 \cdot 60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 \cdot 67 \cdot 68 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 71 \cdot 72 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 \cdot 80 \cdot 81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot 84 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89 \cdot 90 \cdot 91 \cdot 92 \cdot 93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$

2) $x=2$

$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 44 \cdot 46 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 52 \cdot 54 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 60 \cdot 62 \cdot 64 \cdot 66 \cdot 68 \cdot 70 \cdot 72 \cdot 74 \cdot 76 \cdot 78 \cdot 80 \cdot 82 \cdot 84 \cdot 86 \cdot 88 \cdot 90 \cdot 92 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 98 \cdot 100$

$2(2+y) = z^2, 9 \cdot 3 \cdot 2$

3) $x=3$

$6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 44 \cdot 46 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 52 \cdot 54 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 60 \cdot 62 \cdot 64 \cdot 66 \cdot 68 \cdot 70 \cdot 72 \cdot 74 \cdot 76 \cdot 78 \cdot 80 \cdot 82 \cdot 84 \cdot 86 \cdot 88 \cdot 90 \cdot 92 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 98 \cdot 100$

$z=4$

$3(3+y) = z^2, 9 \cdot 3 \cdot 2$

4) $x=4$

$8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 28 \cdot 30 \cdot 32 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 38 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 44 \cdot 46 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 52 \cdot 54 \cdot 56 \cdot 58 \cdot 60 \cdot 62 \cdot 64 \cdot 66 \cdot 68 \cdot 70 \cdot 72 \cdot 74 \cdot 76 \cdot 78 \cdot 80 \cdot 82 \cdot 84 \cdot 86 \cdot 88 \cdot 90 \cdot 92 \cdot 94 \cdot 96 \cdot 98 \cdot 100$

$4(4+y) = z^2 = 72 : 2$

$z=6, y=5$

$4(4+y) = 36$
(4, 5, 6)

$x(x+z) > xy = (z-x)(z+x)$

из пер-ва ΔABC

$y < x+z$

$x > z-x$

$2x > z$

то $z > x$, т.к. $z^2 - x^2 = xy > 0$

$2x > z > x$

6) $x=5$

$3x+y \geq 18 > 17$

5) $x=5$

$10 > z > 5$

$5(5+y) = z^2 = 72 : 5$



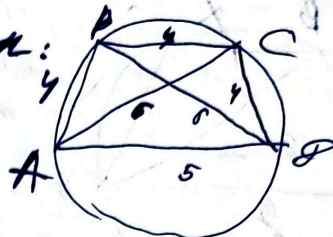
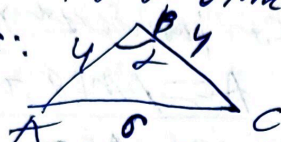
2

Исходные.

Треугольник ABC и ромб $APBQ$ вписаны в окружность ($\odot$) генерально-многоугольника.

Найти радиус окружности.

отр. $\triangle ABC$:



7. По формуле: $\cos \angle = \frac{4^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{-4}{2 \cdot 4 \cdot 4} = -\frac{1}{8}$

$\sin \angle = \sqrt{1 - \cos^2 \angle} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{63}{64}}$

$2R(ABC) = \frac{AC}{\sin \angle} = \frac{6}{\sqrt{\frac{63}{64}}} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}}$

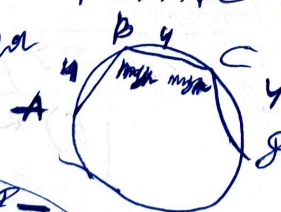
$R(ABC) = \frac{8}{\sqrt{7}}$

Средняя линия $\sin \frac{\angle}{2}$
 $2\cos^2 \frac{\angle}{2} - 1 = \cos \angle$
 $2\cos^2 \frac{\angle}{2} = 1 - \frac{1}{8}$
 $\cos \frac{\angle}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, т.к. $\frac{\angle}{2}$ острый
 $\sin \frac{\angle}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\angle}{2}} = \frac{3}{4}$

Треугольник $APBQ$ вписан, то радиус окружности $\odot$ равен:

Решим отпр. $R(ABC)$, отнимем радиус. Тогда получим $\cos \angle < 0 \Rightarrow \angle$ в $\triangle ABC$ тупой, значит

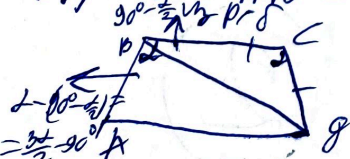
вписанный ромб $APBQ$ в $\odot$ не может существовать, так как $AC=BC=6$ и $AB=5$



(1) $2R(ABC) \sin \angle APB = 5$

(1) $\sin \angle APB = \frac{5\sqrt{7}}{70}$

(1) $AB=5$



$\sin \angle APB = \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 90^\circ \right) = -\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{70}$ Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

3

N4

Нумерация.

$$d_1 = \frac{4043}{2022}; \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n;$$

$$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3;$$

$$\exists b_i = a_i - 1 \text{ при } i \in \mathbb{N}$$

$$\text{тогда } b_1 = \frac{2021}{2022}; \quad b_{n+1} = b_n^3;$$

$$\text{т.е. } b_n = \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{n-1}}$$

$$|a_n| \geq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow \frac{2022}{2021} \leq a_n \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2022}{2021} \leq b_n \leq \frac{1}{2021} \Leftrightarrow \left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$$

$b_n > 0$ — очевидное.

~~тогда $\left(\frac{2021}{2022} \right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$~~

Принципиально;

непр. $\frac{3^{n-1}}{2022} > \frac{1}{2021}$ т.е. $\frac{3^{n-1}}{2022} > \frac{1}{2021}$

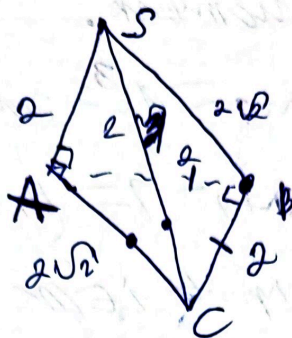
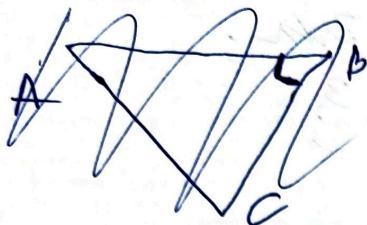
верно для $n \geq 1$ т.к. $\frac{3^{n-1}}{2022} > \frac{1}{2021}$

принципиально.

4

Принцип: П.

Множество.



$$\begin{aligned} (SAB) \perp (ABC) \cap (SAC) \perp (ABC) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (SAB) \cap (SAC) \perp (ABC), \text{ т. е. } SA \perp AB &\Rightarrow \\ \Rightarrow \angle SAC = \angle SAB = 90^\circ. \end{aligned}$$

$$AB = BC = SA = 2$$

$$\text{т. е. } \triangle ABC: AC = 2\sqrt{2}$$

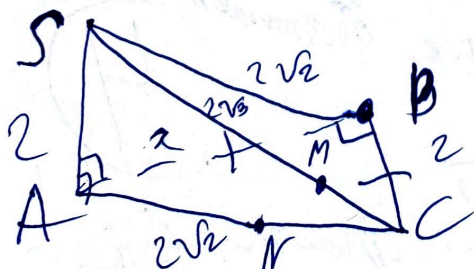
$$\triangle ASC: SC = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ASB: SB = 2\sqrt{2}$$

Множество C состоит из S и точек, лежащих на прямой SC

(SC > 2\sqrt{2}), отрезок AC (SA < 2\sqrt{2}) и прямая, перпендикулярная SC

и точка B (SB = 2\sqrt{2}).



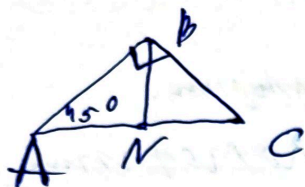
Вм. многообразие.
полюс S, но
полюс отрезок
AMB.



$$\begin{aligned} V_{SABC} &= \frac{S_{ABC} \cdot SA}{3} = \frac{\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2}{3} = \\ &= \frac{4}{3}; \end{aligned}$$

Мнемоника.

$$V_{SABN} = SA \cdot S_{ABN} = \frac{3 \sin 45^\circ \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} \cdot 3$$



4. Им. $ASAN$:

$$AN = \sqrt{AC^2 - AS^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$$

7. е. Найдено сечение $V_{SABN} + V_{н.шага}$ и

$V_{SAPC} - (V_{SABN} - V_{н.шага})$ и получим
 общее значение $V_{н.шага}$

$V_{н.шага}$ и найдем ее значение, тогда
 интервалы, по способ переноса задан
 и найдем ответ.

N 7

Пример: ~~2087~~ 2049

$$45^2 = 2025, 45^2 = (45+9)^2 = 2025 + 90 + 81 = 2196 > \del{2087} 2049$$

$$73^2 = 709 \cdot 73 = 7090 + 504 = 7594 > \del{2087} 2049$$

$$72^2 = 744 \cdot 72 = 7440 + 288 = 7728 > \del{2087} 2049$$

$$3^2 = 81 \cdot 9 = 729 < \del{2087} 2049$$

$$4^2 = 2^{12} = 4096 > \del{2087} 2049$$

От 1 до ~~2087~~ мы знаем, что 45, 72, 73, 3, 4
 не подходят. Мы знаем, что 45, 72, 73, 3, 4
 не подходят. Мы знаем, что 45, 72, 73, 3, 4

Тогда оставшиеся $\frac{2087}{2049} - 45 - 72 + 3 = \frac{2087}{2049} - 54 = 2025.$

Поэтому 2, 3, 5 оставшиеся, которые мы знаем, что 2, 3, 5 = 3, 2, 5
 (1=15, 4=25) $2025 - 3 = 2022.$ QED

hδ

Микром.

$$|x(x+1)^2 + d| + |x(x-1)^2 + d| < 4(x^2 + 2x)$$

при $|d| < 2$ 0 всегда нестрогим.
 Тогда неравенство верно. 10 месяцев.

7