МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Марченко Владислав Михайлович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Марченко Владислав Михайлович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	85 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Чистовик №1. Вариант 11-1

№1

Если нужно такое число, которое будет стоять на 2022 месте в последовательности 6, 7, 8, 9, 10..., то это будет то же самое число, которое в последовательности 1, 2, 3, 4, 5, 6... будет стоять на 2025 месте (ведь среди чисел 1, 2, 3, 4, 5 есть 2 полных квадрата).

Заметим, что $2025 = 45^2$, значит до 2025 места есть 44 полных квадрата, а вместе с 2025 – 45 полных квадратов. Теперь найдём ближайший полный куб к числу 2025. Это число 12, ведь $12^3 = 1728 < 2025$, а ~~$13^3 = 1728$~~ $13^3 = 2197 > 2025$. Значит в последовательности до числа 2025 12 полных кубов. Не будем забывать, что в последовательности есть числа, из которых извлекается корень 6-ой степени. Это значит, что они являются и полным квадратом и кубом, поэтому их вычесть нужно только один раз. Вспомним, что $3^6 = 729 < 2025$, а вот $4^6 = 4096 > 2025$. Значит в последовательности 3 числа, из которых извлекается корень 6-ой степени, значит нужно исключить всего $45 + 12 - 3 = 54$ числа. Значит на 2025 месте будет стоять ~~число~~ $2025 + 54 = 2079$.

Ответ: 2079

Чистовик №2.

№2

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos\left(\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}\right)$$

Оценим выражение $\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}$.

$$\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos50^\circ}=\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\sin40^\circ}=\frac{\sin40^\circ}{4\sin40^\circ\cos40^\circ}+\frac{\sqrt3\cos40^\circ}{4\sin40^\circ\cos40^\circ}=$$

$$=\frac{\sin30^\circ\sin40^\circ}{\sin80^\circ}+\frac{\cos30^\circ\cos40^\circ}{\sin80^\circ}=\frac{\cos10^\circ}{\sin80^\circ}=\frac{\sin80^\circ}{\sin80^\circ}=1$$

Значит исходное неравенство преобразуется к виду:

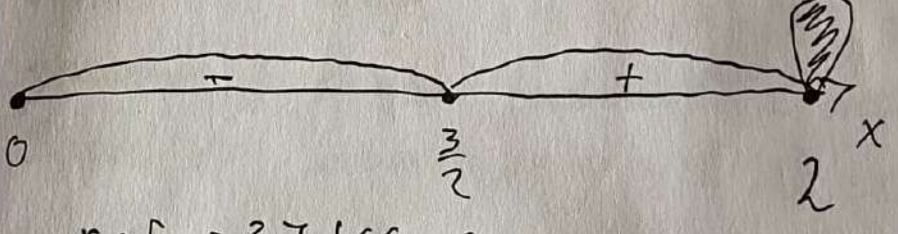
$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le\arccos(1)$$

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot\arccos(x-1)\le0$$

Найдём критические точки:

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&8x^3+4x^2-18x-9=0\\&\arccos(x-1)=0\end{aligned}\right.\\-1\le x-1\le1\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{aligned}&(2x+1)\cdot(2x-3)\cdot(2x+3)=0\\&x-1=1\end{aligned}\right.\\0\le x\le2\end{cases}\iff\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=-\tfrac12\\&x=\tfrac32\\&x=-\tfrac32\\&x=2\end{aligned}\right.\\0\le x\le2\end{cases}$$

В итоге имеем:



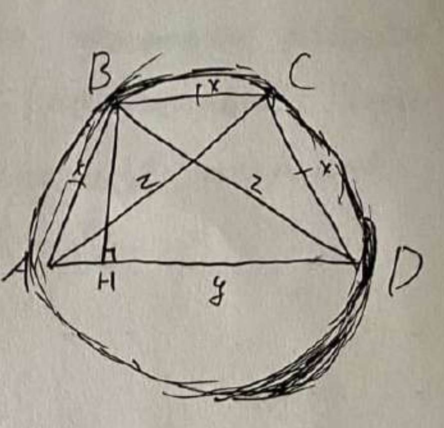
$x\in[0;\frac32]\cup\{2\}$

Ответ: $x\in[0;\frac32]\cup\{2\}$

Чистовик №3.

№3

1) Заметим, что ~~если~~ у четырёхугольника боковые стороны равны, а т.к. он вписанный, то мы знаем, что равные хорды стягивают равные дуги. Следовательно $AD \parallel BC$, а $AB=CD$, значит $ABCD$ - р/б трапеция. Пусть $AB=BC=CD=x$, тогда $AD=y$, а $AC=BD=z$.



2) Т.к. четырёхугольник вписанный, то по теореме Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$, значит $x^2 + xy = z^2$, следовательно $z^2 = x \cdot (x+y)$. Оценим y. Очевидно, что $3x > y$, иначе трапеция невозможна. Зная это, и то, что x, y, z - натуральные числа, попробуем найти минимальный x, при котором все условия соблюдены.

3) Пусть $x=1$, тогда $y<3 \Rightarrow y \in [1;2]$, значит $z^2 = 1 \cdot (1+1)$ или $z^2 = 1 \cdot (1+2)$

Очевидно, что в этих случаях z - не целое.

Пусть $x=2$, тогда $y<6 \Rightarrow y \in [1;5]$, ~~значит~~ подставляя эти значения y в наше уравнение z опять будет не целым.

Пусть $x=3$, тогда $y<9 \Rightarrow y \in [1;8]$, если подставлять эти значения, то опять z не будет целым ни при каком y.

Пусть $x=4$, тогда $y<12 \Rightarrow y \in [1;11]$, заметим, что если $y=5$, то получим $z^2 = 4 \cdot (4+5) \Rightarrow z=6$. Значит минимальные возможные значения - $x=4$, $y=5$, $z=6$, значит $P_{ABCD} = 4 \cdot 3 + 5 = 17$

Чистовик №1

№3 (продолжение)

4) Проведём высоту BH. Зная все стороны трапеции найдём её. $BH = \sqrt{16 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ (по теореме Пифагора.) Значит $\sin\angle A = \frac{3\sqrt{7}}{8}$. Воспользуемся теоремой синусов: $\frac{BD}{\sin\angle A} = 2R \Rightarrow \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} = 2R \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

Ответ: $P_{ABCD} = 17$; $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$.

№4

Вспомнив треугольник Паскаля легко понять, что формулу для a_{n+1} можно преобразовать к виду $(a_n - 1)^3 + 1$. Зная, что $a_1 = \frac{4043}{2022}$, найдём несколько следующих членов последовательности:

$\cancel{a_2 = \left(\frac{4043}{2022} - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022} - 1\right)^3 + 1}$ $a_2 = \left(\frac{4043}{2022} - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$

$\cancel{a_3 = \left(\left(\frac{2021}{2022} - 1\right)^3 + 1\right)^3 = \left(\frac{2021}{2022} - 1\right)^9}$ $a_3 = \left(\left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1 - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1$

$a_4 = \left(\left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1 - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{27} + 1$

Отсюда легко сделать вывод о том, что $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$

В условии спрашивается может ли $|a_n| \le \frac{2022}{2021}$, но очевидно, что $a_n > 0$ всегда значит знак модуля можно опустить. Тогда получим:

$a_n \le \frac{2022}{2021} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le \frac{2022}{2021} \Rightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le \frac{1}{2021} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{n-1} \ge \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right) \Rightarrow n - 1 \ge \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)\right) \Rightarrow n \ge \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)\right)$

Получим, что если n больше данно значения, то найдётся такое натуральное число, что $|a_n| \le \frac{2022}{2021}$

Ответ: Да.

Чистовик №5.

№6

$$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a|<4x^2+8x$$

Пусть $p=x^3+2x^2+x+a$, $q=x^3-2x^2+x-a$, $r=4x^2+8x$.

Заметим, что

$$|p|+|q|=\begin{cases}|p+q|, & p\cdot q\geq 0\\ |p-q|, & p\cdot q<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|p+q|<r\\ |p-q|<r\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p+q<r\\ -p-q<r\\ p-q<r\\ q-p<r\end{cases}$$

Значит исходное неравенство можно переписать в виде:

$$\begin{cases}x^3+2x^2+x+a+x^3-2x^2+x-a<4x^2+8x\\ -x^3-2x^2-x-a-x^3+2x^2-x+a<4x^2+8x\\ x^3+2x^2+x+a-x^3+2x^2-x+a<4x^2+8x\\ -x^3-2x^2-x-a+x^3-2x^2+x-a<4x^2+8x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^3+2x<4x^2+8x\\ -2x^3-2x<4x^2+8x\\ 4x^2+2a<4x^2+8x\\ -4x^2-2a<4x^2+8x\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\cdot(x-3)\cdot(x+1)<0\\ x\cdot(2x^2+4x+10)>0\\ x>\frac{a}{4}\\ 8x^2+8x+2a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<3\\ x>\frac{a}{4}\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1-a}{4}\end{cases}$$

~~Чтоб отрезок имел длину 1, возможны следующие случаи: $0<x<1$; $1<x<2$; $2<x<3$. Если присмотреться, то становится ясно, что первые 2 случая невозможны, значит возьмём третий.~~

Рассмотрим 2 случая: 1) $a>1$ и 2) $a<1$

1) Если $a>1$, то $1-a<0$, значит промежуток может иметь длину 1 только если $x>2$, значит $\frac{a}{4}=2 \Rightarrow a=8$

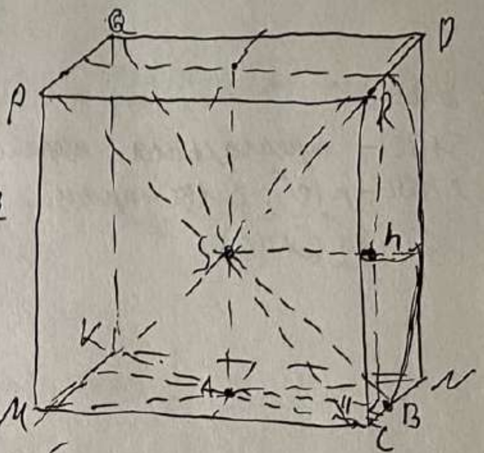
2) Если $a\leq 1$, то $\frac{a}{4}<2$, значит нужно, чтобы $\sqrt{\frac{1-a}{4}}-\frac{1}{2}=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1-a}{4}=6{,}25 \Rightarrow -a=24 \Rightarrow a=-24$

Ответ: $a=-24$; $a=8$

Чистовик 6

№5



1) Построим куб MCNKPRDQ. Заметим, что в этот куб помещается 48 пирамид SABC $\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{48} V_{MCNKPRDQ}$

Заметим, что каждая из 48 пирамид располагается центрально-симметрично вершины S.

2) Пусть $SA = AB = x$, тогда ребро куба будет $2x$, т.к. по условию $\triangle ABC$ - р/б, AC - гипотенуза, то $AB = BC = SA = 2$ (по свойству стороны р/б треугольника)

3) Заметим, что искомый объём является не только $\frac{1}{48}$ ~~объёма куба~~ части куба, но он также является пересечением куба и шара радиусом $R = x\sqrt{2}$. (из р/б и прям $\triangle SAB$)

4) Данное сечение представляет собой шар без шести шаровых сегментов, у которых высота равна $h = \sqrt{2}x - x = x\cdot(\sqrt{2}-1)$

5) Вспомним, что объём сферы $V_{сферы} = \frac{4}{3}\pi R^3$, а $V_{шарового\ сегмента} = \pi h^2\cdot(R - \frac{1}{3}h)$, значит объём шести шаровых сегментов равен $6\cdot\pi h^2(R - \frac{1}{3}h) = 6\cdot\pi x^2(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(x\sqrt{2} - \frac{x(\sqrt{2}-1)}{3}\right)$

6) ~~Значит искомый объём - это~~ Найдём $V_{сферы} - 6V_{шарового\ сегмента}$

$$\frac{4}{3}\pi\cdot(x\sqrt{2})^3 - 6\pi x^2\cdot(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(x\sqrt{2} - \frac{x\cdot(\sqrt{2}-1)}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\cdot 2\sqrt{2}x^3 - 6\pi x^3(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)}{3}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{3}\pi x^3 - 6\pi x^3\cdot(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi x^3 - 6\pi x^3\cdot(\sqrt{2}-1)^2\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{3}\right) =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi x^3 - \frac{6\pi x^3(\sqrt{2}-1)\cdot(2\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi x^3 - 2\pi x^3\cdot(\sqrt{2}-1)^2(2\sqrt{2}+1) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi x^3\left(4\sqrt{2} - 3(2-2\sqrt{2}+1)\cdot(2\sqrt{2}+1)\right) = \frac{2}{3}\pi x^3\cdot\left(4\sqrt{2} - 3\cdot(6\sqrt{2}+3-8-2\sqrt{2})\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi x^3\left(4\sqrt{2} - 3\cdot(4\sqrt{2}-5)\right) = \frac{2}{3}\pi x^3(15 - 8\sqrt{2}).$$

Чистовик 7

№5 (продолжение)

7) Искомый объём $\frac{1}{48} \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 2^3 \cdot (15-8\sqrt{2}) = \frac{\pi \cdot (15-8\sqrt{2})}{9}$

8) Заметим, что $V_{\text{пирамиды } SABC} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot AS = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CB \cdot SA$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$

Как оговорилось ранее: $V_{SABC} = \frac{1}{48} V_{MCNKPRDQ}$.

9) Т.к. $\frac{\pi \cdot (15-8\sqrt{2})}{9} > 1 \Leftrightarrow \frac{15-8\sqrt{2}}{9} > \frac{15-12}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$

А это значит, что мы как раз нашли объём большей части пирамиды.

Ответ: $\frac{\pi \cdot (15-8\sqrt{2})}{9}$

Черновик. 8

№1

1 2 3 4 5 6 ...

~~5+2022=2027~~

$45^2 = 2025\ldots$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$4^6 = 4096$

$12^2 = 144$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$13^2 = 169$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$45 + 12 - 3 = 54$

$2025 + 54 = 2079$

Ответ: 2079

№2

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ} =$$

$$\frac{\cancel{4\sin 40^\circ + 4\sqrt{3}\cos 40^\circ}}{\cancel{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ}}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 80^\circ} + \frac{\sqrt{3}\cos 40^\circ}{2\sin 80^\circ} = \frac{\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

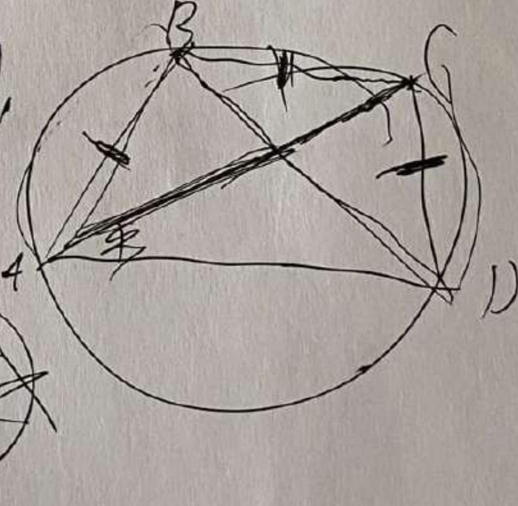
$$4x^2 \cdot (2x+1) - 9 \cdot (2x+1) =$$

$$= (2x+1) \cdot (4x^2 - 9) = (2x+1) \cdot (2x-3) \cdot (2x+3)$$

№3

ABCD - р/б трап.

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$



Черновик :)

№3

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

$z^2 = 3$ Q

$z^2 = 2$ Q

$x^2 + xy = z^2$

$x \cdot (x+y) = z^2$

$z^2 = 2 \cdot (2+1) = 6$

$2 \cdot (2+2) = 8$

$2 \cdot (2+3) = 10$

$2 \cdot (2+4) = 12$

$2 \cdot (2+5) = 14$

$z^2 = 3 \cdot (3+1) = 12$

$+2 = 15$

$+3 = 18$

$+4 = 21$

$+5 = 24$

$+6 = 27$

$+7 = 30$

$+8 = 33$

$z^2 = 4 \cdot (4+1) = 20$

$+2 = 24$

$+3 = 28$

$+4 = 32$

$+5 = 36$

$+6 =$

$+7 =$

$+8 =$

$+9 =$

$+10 =$

$+11 =$

$15 \cdot 4 = 60$

$\sqrt{15\frac{3}{4}}$ $\sqrt{\frac{63}{4}}$

$z^2 = 3 \cdot (3+1)$

№4

$a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$a_1 = \frac{4043}{2022}$ $a_2 = \left(\frac{4043}{2022} - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$

$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$ $a_3 = \left(\left(\frac{2021}{2022} - 1\right)^3 + 1 - 1\right)^3 = \left(\frac{2021}{2022} - 1\right)^9 + 1$

Черновик 10

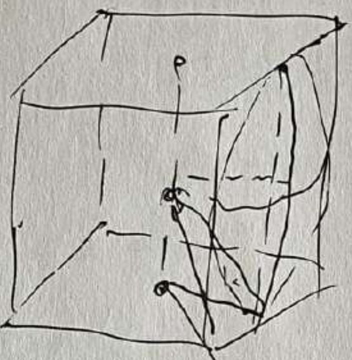
№4

$1+\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le \frac{2022}{2021} \Rightarrow 3^{n-1} \le \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right) \Rightarrow$

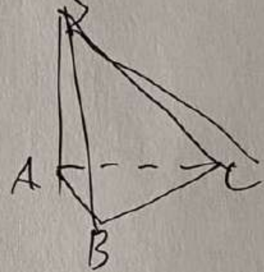
$\Rightarrow n-1 \ge \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)\right)$

$n \ge 1+\log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)\right)$

№5



$V=\frac{4}{3}\pi R^3$



$V=\pi R^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$

$6V=6\pi R^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)$

$V_{сф}-6V = \ldots \ldots =$

№6

~~$|p+q| = |p+q|$~~

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

~~$|z+x| = \begin{cases} |z+x| \\ |x|+|z| \end{cases} =$~~

Черновик 11

№6

$2x^3-4x^2-6x<0$

$x\cdot(2x^2-4x-6)<0$

$x\cdot(x-3)\cdot(x+1)<0$

$-$ $+$

-1 0 3

$-2x^3-4x^2-10x$

$2x^3+4x^2+10x>0$

$x\cdot(2x^2+4x+10)>0$

$2a<8x$

$x>\frac{a}{4}$

$8x^2+8x+2a>0$
$k=4$

~~$x^2+x+\frac{1}{2}$~~

$D_1=16-16a$ $16\cdot(1-a)$

$8x^2+8x+2a=8x^2+$

$0<x<3$

$x>\frac{a}{4}$

$(x+\frac{1}{2})^2>\frac{1-a}{4}$