**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Тихонов Кирилл Олегович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Тихонов Кирилл Олегович

Класс: 10-11

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Тех. балл*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 0 баллов | 80 баллов |

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

ЧИСТОВИК

№2. $\arccos(-2x-1)$ $-1\le -2x-1\le 1 \Leftrightarrow 0\le -2x\le 2 \Leftrightarrow -1\le x\le 0$

чтобы $\arccos(-2x-1)$ была определена $\Rightarrow$ нужно взять значения $x$ только из этого промежутка. $\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\{-1\}$

N3 $xyz+xy+xz+yz+2023=x+y+z+1+xyz+xy+xz+yz=$

$=(1+x)(1+y)(1+z)$ - чтобы максимизировать ~~число~~ произведение при заданной сумме нужно, чтобы все слагаемые были равны.

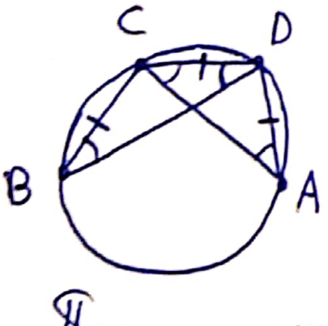
$(1+x)+(1+y)+(1+z)=2025 \Rightarrow 1+x=675=1+y=1+z$

$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z)=(675)^3$ мы нашли наибольшее значение не ~~д~~ пользуясь тем, что оно целое $\Rightarrow$ если наибольшее значение оказалось целым, то оно наибольшее и среди всех целых значений.

$675=3^3\cdot 5^2 \Rightarrow (675)^3=3^9\cdot 5^6 \Rightarrow$ по формуле кол-ва делителей у этого числа их будет $(9+1)(6+1)=70$

N4 Если четырехугольник вписанный, то верно, что $AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot AC$

$BC=CD=AD=a$ $AB=b$ $a,b\in N$ $BD=AC$ т.к ~~при одной~~



$\angle CBD=\angle CDB=\angle CAD=\angle DCA \Rightarrow$ равнобедренные $\triangle BCD$ и $CDA$ равны по углам и стороне $\Rightarrow CA=BD$

$\Rightarrow AC\cdot BD=a^2+ab \Rightarrow AC=\sqrt{a(a+b)}$ $AC\in N$

Пусть $a=4, b=5 \Rightarrow AC=\sqrt{4(4+5)}=6 \Rightarrow P=4\cdot 3+5=17$ Попробуем построить четырехугольник с меньшим периметром.

$3a>b$ - по неравенству ломаной.

Если $a\geqslant 6$, то $3a\geqslant 18>17 \Rightarrow$ такие $a$ нам не подходят т.к периметр будет больше 17.

ЧИСТОВИК

Пусть $a=5 \Rightarrow b=2$ или $b=1$, $AC=\sqrt{5(5+b)}$ $5+b \vdots 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(5+b) \vdots 25 \Rightarrow$ т.к $5(5+b) \vdots 5$ – не может быть точным квадратом

Пусть $a=4$ $AC=\sqrt{4(4+b)}=2\sqrt{4+b}$ $4+b$ – полный квадрат

$b\geq 1 \Rightarrow b$ минимум $5 \Rightarrow$ при $a=4$ – $b=5$ – оптимальное

Пусть $a=3$ $AC=\sqrt{3(3+b)}$ $3+b \vdots 3$ т.к иначе $3(3+b)$ – не квадрат

$\Rightarrow b \vdots 3$ $P=3a+b=9+b$. Пусть $P\leq 17 \Rightarrow b=3 \vee b=6$

при $b=3$ ~~четн~~ $AC=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ – не подходит

при $b=6$ $AC=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ – не подходит

при $a=2$ $AC=\sqrt{2(2+b)} \Rightarrow 2+b \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$ $3a>b \Rightarrow b<6 \Rightarrow$

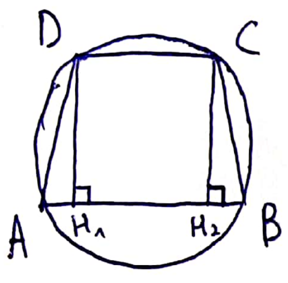
$\Rightarrow b=2 \vee b=4$ при $b=2$ $AC=\sqrt{8}$ – не подходит

при $b=4$ $AC=\sqrt{12}$ – не подходит

при $a=1$ $AC=\sqrt{1+b} \Rightarrow 1+b$ – точный квадрат $\Rightarrow$ ~~$b\geq$~~ $1+b\geq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\geq 3$ $3a>b$, ~~$3>b$~~ $3>b$ – противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~Если~~ Если $P\leq 17$ существует только 1 такой четырехугольник




$AD=DC=BC=4$ $AB=5$ $AC=BD=6$

ABCD – равнобедренная трапеция т.к он вписан и ~~AB=C~~

$AD=BC \Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow S=\frac{CD+AB}{2}\cdot h$

$h=DH_1$ $AH_1=BH_2$ – из симметрии $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH_1=\frac{AB-CD}{2}=\frac{5-4}{2}=\frac{1}{2}$ $DH_1=\sqrt{AD^2-AH_1^2}=\sqrt{\frac{63}{4}}=\frac{\sqrt{63}}{2}$

$S=\frac{4+5}{2}\cdot\frac{\sqrt{63}}{2}=\frac{9\sqrt{63}}{4}$

ЧЕРНОВИК

~~6 = 3a+b~~

$7 = 3a+b$

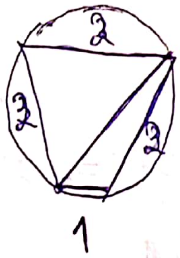
$3a > b$

$x(x+1)^2 + 2(x-1)^2$

$2x(x^2+1) < 4x(x-2)$

$x^2+1 < 2(x-2)$

$x^2 - 2x + 5 < 0$




$8 = 3a+b$

$|x(x+1)^2 - a| + |x(x-1)^2 + a|$

$\wedge$

$4x(x-2)$

$4096 - 64 - 16 + 4$

$a = 2$

$2\cdot 2 + 2\cdot 2$

~~6+3~~

$3a > b$

$3+9$

$2+4$

~~2022+~~

15

$10 = 3a+b$

$x$

~~a~~

$x < 0$

9

$11 = 3a+b$

~~x~~

$-2x(x^2+1) < 4x(x-2)$

1 до $n^6$

$4^6 = 2^{12} = 4096$

2,2,2,4

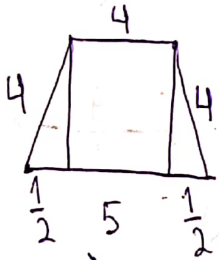
$\sqrt{a(a+b)}$

2022

$4+8$

$-2(x^2+1) > 4(x-2)$

4,4,4,5




3,3,3,2

14

~~196~~

$\sqrt{a(a+b)}$

~~9+6~~

~~3(3+1)~~

169

13

5,5,5,1,2

$1(1+3)$

507

27

27

$4(4+5)$

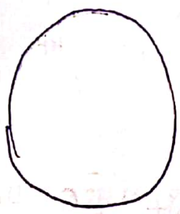
$3a+b$

169

2197

343

~~3a~~



1

[redacted]

$\sqrt{2(2+b)}$

2197

1

13

$\sqrt{3(3+b)}$

$6+b$

a

$\frac{5+4}{2}\cdot\sqrt{16-\frac{1}{4}}$

$b = 6$

$a+b < 4a$

$9+b$

$b < 3a$

$\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{63}}{2}$

$15\frac{3}{4}$

~~3+b<~~

(1)

ЧЕРНОВИК

$k=25$ $\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\cancel{1+x+1=}$

$(1+x)(1+y)(1+z)$

$\cancel{x+}$

$16+20$

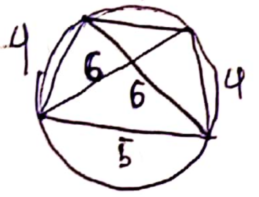
$x+y+z=2022$

$\frac{9}{4}-\frac{9}{4}$

$3^2-4-2\cdot k=0$

$\frac{2022}{3}$

$\cancel{667}$




$2022$

$18\cdot\frac{1}{8}-9\cdot\frac{1}{4}-1+1$

$(675)^3$ $5$ $3a+b$ $674$

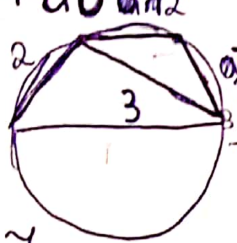
$\arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$

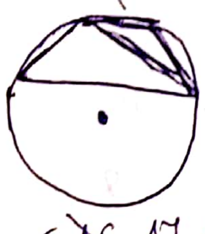
$d^2=a^2+ab$

$\left(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}-\sqrt[6]{n}\right)$

$\boxed{17}$

$\sqrt{n}$ $a^2+$ $\sqrt[3]{n}$



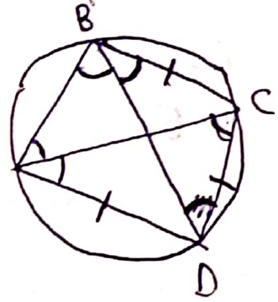



$18\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdot\arccos(2x-1)\geq$

$5^2\cdot 27$

$3^3\cdot 5^2$

$12, 13, 14, 15, \cancel{16}, 17, 18 \ldots \cancel{25}, 26, \cancel{27}, \ldots \cancel{36}, \ldots \cancel{64}$




$3^9\cdot 5^6 \Rightarrow k=10\cdot 7=70$

$\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-1+1$

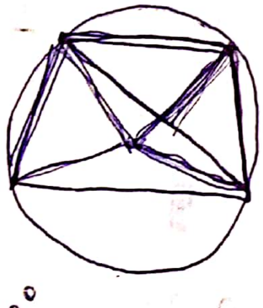
$2022$

$40^\circ+$

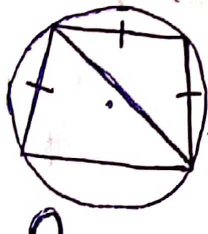
$\in[0;\pi]$

$2^6$

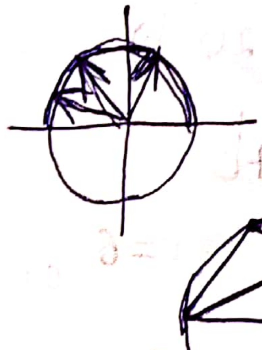
$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(18x^2 \quad -2\right)$



$\arccos(-2x-1)>0$

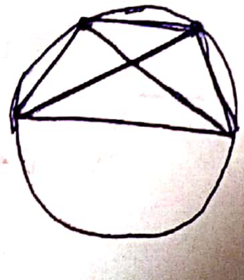


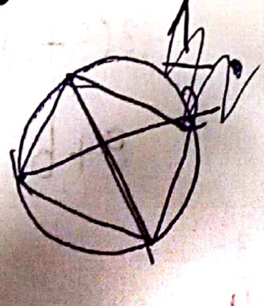
$18\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$



$0$

$4\sin 40^\circ+4\sqrt{3}\cos 40^\circ$





$$\frac{8\sin \cancel{100^\circ} 80^\circ}{\cancel{4s}\,16\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ}$$

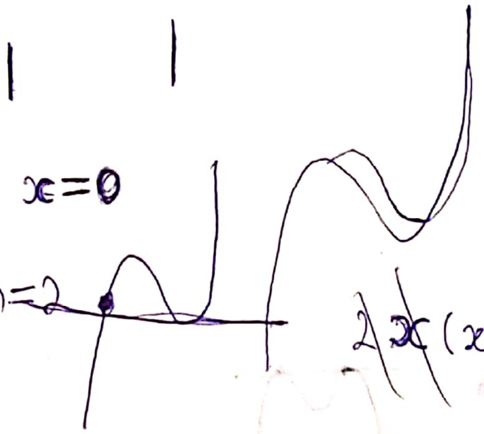
$1$

$\Leftrightarrow 0 \le -2x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$

ЧЕРНОВИК

1 до n

$x=0$



$x=0$

$x^2-2x+5=0$

$k^2$

$l^3$

$m^6$

$m=2$

$\cancel{2x}(x^2+1)=\cancel{4x}(x-2)$

$n-k-l+m-11=2022$

$2088-11-45-12+13=$

$n-k-l+m=2033$

$2088-11-45-12+3-7=2022$

$n-k-l=2031$

$x=\frac{a}{4}$

$-4+a$

$a\in(0;4)$ 2022

~~2088-11-45-12-~~

$4x^2-2a=4x^2-8x$

$a=4x$

$-\cancel{2x}(x^2+1)=\cancel{2x}(x-2)$ $13^3$

~~2088-45-12+3~~

$8x=2a$

~~n-13~~

12

144

12

288

144

1728

$x^2+2x-3=0$

~~2197-13~~

$n-45-12+3-7=2022$

~~x=1~~

45

45

225

1800

2025

$(x+3)(x-1)=0$

$l=12$

$n-k=2043$

2, 3, 5, 6, 7, 10, 11

$-1$ $3$

$8\left(\sin 40^\circ\cdot\frac{1}{2}+\cos 40^\circ\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{}{8\sin 80^\circ}$

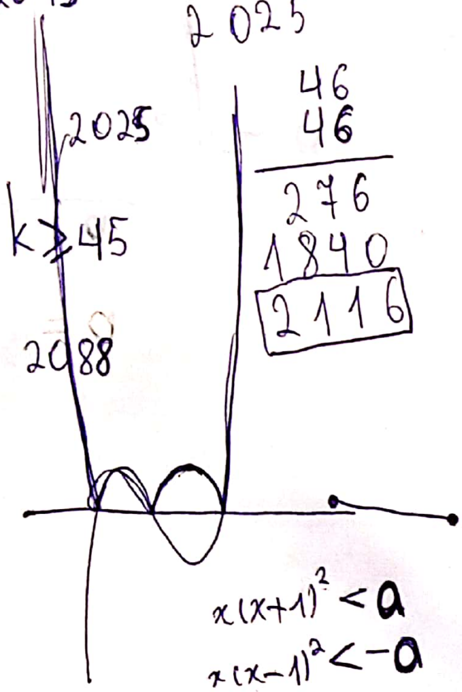
~~16~~

16

2025

$k \ge 45$

2088



46

46

276

1840

$\boxed{2116}$

$-57-7$

~~464~~

$-61$

2083

$4x(x-2)$

$a=4$

$x(x+1)^2<a$

$x(x-1)^2<-a$

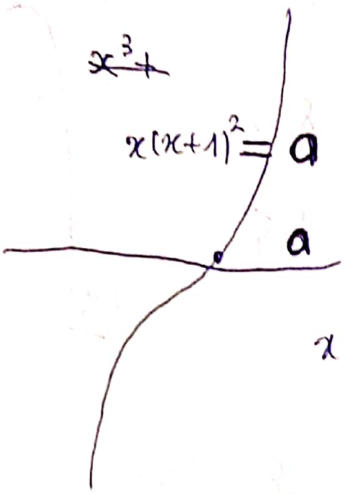
1

3

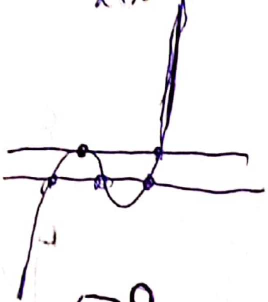
ЧЕРНОВИК

$\cancel{x^3+}$

$x(x+1)^2=a$




$x(x-1)^2=-a$



$a>0$

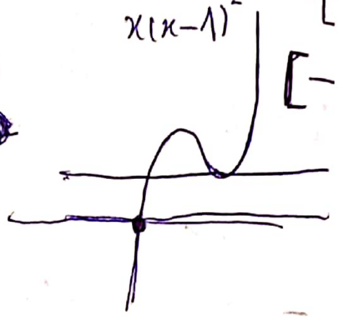
$|x^3+2x^2+x-a|$

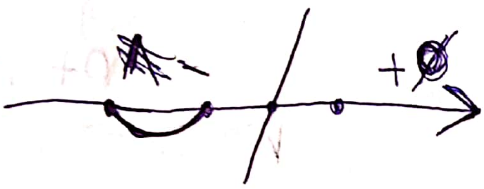
~~[0;~~

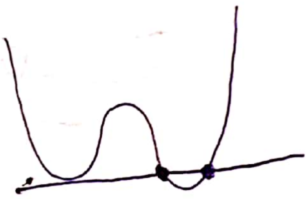
$x(x-1)^2$

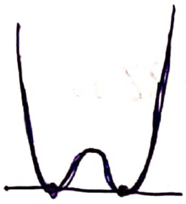
$[-1;1]$

$x>0$







ЧИСТОВИК ВАРИАНТ 10-1

**N1.** Возьмём число 2083 и посмотрим сколько чисел перед ним мы вычеркнули, включая ~~их~~ числа от 1 до 11, которые не входят в нашу последовательность.

1) $45^2=2025<2083$, $46^2=2116>2083 \Rightarrow$ мы вычеркнули 45 - квадратов

2) $12^3=1728<2083$, $13^3=2197>2083 \Rightarrow$ мы вычеркнули 12 кубов

3) $1^6, 2^6, 3^6<2083$ $4^6>2083$. $n^6$ - мы вычеркнули 2 раза т.к это и квадрат и куб $\Rightarrow$ нужно добавить 3.

4) числа 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11 мы еще не вычеркнули $\Rightarrow$ вычитаем 7

$2083-45-12+3-7=2022 \Rightarrow$ в последовательности оканчивающейся 2083 - 2022 числа $\Rightarrow$ 2083 стоит на 2022 месте т.к не является квадратом или кубом $\Rightarrow$ не вычеркивается Ответ: 2083

**N2**

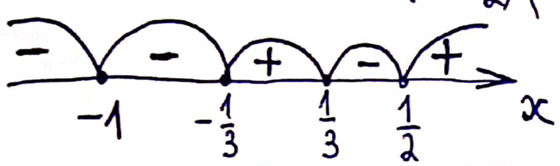
$$\cancel{arc}\ \frac{1}{4\sin 50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sin 50^\circ}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 50^\circ}\right)=\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 30^\circ\cdot\cos 50^\circ+\cos 60^\circ\cdot\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ\cdot\cos 50^\circ}\right)=\frac{\sin 110^\circ}{2\sin 50^\circ\cdot\cos 50^\circ}=\frac{\sin 110^\circ}{\sin 100^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 30^\circ\cdot\cos 50^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ\cdot\cos 50^\circ}\right)=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ}=1$$

$\arccos(1)=0 \Rightarrow (18x^3-9x^2-2x+1)\arccos(-2x-1)\geq 0$

$\arccos(x)\in[0;\pi] \Rightarrow \arccos(-2x-1)\geq 0 \Rightarrow$ он не влияет на решение кроме того когда он 0, $\arccos(-2x-1)=0 \Rightarrow -2x-1=1 \Rightarrow x=-1$

$18x^3-9x^2-2x+1=18\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ ~~+2x~~




$\Rightarrow x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right]\cup\{-1\}$

ЧЕРНОВИК

N5 Ответ: $a=4$

$$|x^3+2x^2+x-4|+|x^3-2x^2+x+4|<4x^2-8x$$

$$|(x-1)(x^2+3x+4)|+|(x+1)(x^2-3x+4)|<4x^2-8x$$

~~$|(x-1)(x+$~~ $x^2+3x+4>0$ т.к $D=9-16<0$

$x^2-3x+4>0$ т.к $D=9-16<0$

$\Rightarrow$ при $x\leq-1$ оба ~~его~~ числа отрицательны

при $-1<x<1$ первое $>0$, второе $<0$

при $x\geq1$ оба положительны

1) $x\leq-1$

$$-(2x^3+2x)<4x^2-8x \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x>0 \Leftrightarrow x(x+3)(x-1)>0$$

$-$ $+$ $-$ $+$ ; $-3$ $0$ $1$ $x$ $\Rightarrow$ $x\in[-3;-1]$

2) ~~$x$~~ $-1<x<1 \Rightarrow x^3+2x^2+x-4-x^3+2x^2-x-4=4x^2-8$

$$4x^2-8<4x^2-8x \Rightarrow 8-8x>0 \Rightarrow x<1$$