



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кортова Анна Олеговна**

Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Кортova Анна Олеговна

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Беловик.

① Пусть x — производительность одного рабочего за 1 день.

	A	B	C	люди
I	10	x	1	
II	$\frac{7x}{2}$	x	$\frac{1}{2}$	7

$\frac{7x}{2} + 10$ — все работа, т.е. общее кол-во фредак и это число $\in \mathbb{N}$.

Логично предположить, что $\frac{7x}{2} < 5$, т.к. $7x$ должно быть меньше 10 из-за того, что работников во II день было меньше, а производительность сохранилась.

Рассмотрим 4 случая:

1) $\frac{7x}{2} = 1$; $7x = 2$; $x = \frac{2}{7}$.

Всего работников: $10 : \frac{2}{7} = 35$. Подходит

2) $\frac{7x}{2} = 2$; $7x = 4$; $x = \frac{4}{7}$.

Всего работников: $10 : \frac{4}{7} = 17.5$. Не подходит. Число работников — натуральное.

3) $\frac{7x}{2} = 3$; $7x = 6$; $x = \frac{6}{7}$.

Всего работников: $10 : \frac{6}{7} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3}$. Не подходит. Число работников — натуральное.

4) $\frac{7x}{2} = 4$; $7x = 8$; $x = \frac{8}{7}$.

Всего работников: $10 : \frac{8}{7} = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$. Не подходит. Число работников — натуральное.

Беловик
Значит во второй день работники вскопали
всего (одну) 1 грядку. Значит всего их было
 $10+1=11$

Ответ: 11 грядок.

② $\overline{abc} - \overline{acb} : 72$

$$(100a + 10b + c) - (100a + 10c + b) = 9b - 9c = 9(b - c) : 72$$

Значит $b - c : 8$

$$\left. \begin{array}{lll} b=9 & c=1 & 9 \text{ чисел} \\ b=8 & c=0 & 9 \text{ чисел} \\ b=1 & c=9 & 9 \text{ чисел} \\ b=0 & c=8 & 9 \text{ чисел} \\ b=c & & 90 \text{ чисел} \end{array} \right\} 90 + 36 = 126 \text{ чисел.}$$

В условии задачи не сказано, что ~~цифры~~
цифры a, b и c различны, поэтому всего
таких чисел 126.

Ответ: 126 чисел.

③ $x, y \in \mathbb{N}$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022.$$

Заметим, что $(x+y), (x+y+1)$ 2 последовательных числа. Рассмотрим несколько вариантов: $43 \cdot 44 = 1892$; $44 \cdot 45 = 1980$;

$45 \cdot 46 = 2070$, можно прийти к выводу, что только пара 44 и 45 подходит. П.к.

$2022 - 1892 = 130$ - такого быть не может.

А $2070 > 2022$ - но $y \in \mathbb{N}$, поэтому такого быть не может. Справедливо будет

сказать, что если рассматривать пары чисел меньше, то разность

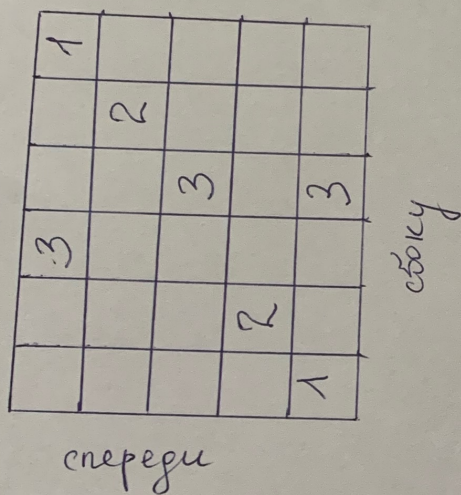
будет увеличиваться. А если рассматри-

Беловик
 вать парю чисел больше, то произведение
 соответственно будет больше. Но y по-преж-
 нему $\in \mathbb{N}$. Поэтому $x+y=44$, а $y=2022-1980=$
 $=42 \Rightarrow x=2$.

($x+y \in \mathbb{N}$, поэтому рассматриваем только
 натуральные числа)

Ответ: $(2; 42)$

④ обозначим цифрами высоту:



Ответ: 7 кубиков.

⑤ $x^2 + ax + 2022 = 0$ $a \in [0; 99]$

Чтобы уравнение имело $\neq$ хотя бы одно
 решение, нужно чтобы $D \geq 0$.

$$D = a^2 - 4 \cdot 2022 = a^2 - 8088$$

Значит $a \geq 90$. ($89 \cdot 89 = 7921 < 8088$)

1) $x = \frac{-90 \pm \sqrt{121}}{2} = -45 \pm \sqrt{31}$.

$$\sum = -45 + \sqrt{31} + (-45) - \sqrt{31} = -90.$$

Беновик

Можно заметить, что ~~подкорен~~ корни взаимно уничтожаются, а сумма полученных корней уравнения равна 0.

То есть сумма всех полученных у Андрея действительных корней этих уравнений: $-90 - 91 - \dots - 99 = -(90 + 91 + \dots + 99) =$
 $= -\left(\frac{90+99}{2} \cdot 10\right) = -945.$

Ответ: $-945.$

6) Можно рассмотреть несколько случаев.

- 1) Если есть портал Галактик-37 $\rightarrow$ Тандора, то Мистеру Риггу хватит 1 прыжок.
 - 2) Если нет портала Галактик-37 $\rightarrow$ Тандора, то с Галактик-37 можно попасть на 40 других планет. С каждой из этих 40 планет можно попасть на 40 других. Если там оказалась Тандора, то достаточно 2 прыжков. Если Тандора там нет, то Тандора оказалась среди 18 $(100 - 40 \cdot 2 - 2)$ планет, пока не рассмотрены.
- Значит Мистеру & Риггу хватит 3 прыжков.

Ответ: 1; 2 или 3.

Черновик

① I 10 ф. по x ф. y чел.

II $\frac{7x}{2}$ по x ф. 7 чел.

	A	B	люди	т
I	xy	x	y	1

II	$\frac{7x}{2}$	x	7	$\frac{1}{2}$
----	----------------	---	---	---------------

$xy + \frac{7x}{2}$ — все работа, при этом
 $xy = 10$ чено

$$10 + \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}(20 + 7x) \quad 7x:2 \Rightarrow x:2$$

Логично предположить, что $\frac{7x}{2} < 10$ и даже меньше 5 (т.к. если бы работали весь день, вскопали бы 10 фредок при одинаковой скорости и меньшем кол-ве рабочих)

Рассмотрим несколько случаев:

1) $\frac{7x}{2} = 1, \quad 7x = 2; \quad x = \frac{2}{7}$.

$10 : \frac{2}{7} = 35$ рабочих было изначально.

Всего 11 фредок

2) $\frac{7x}{2} = 2, \quad 7x = 4, \quad x = \frac{4}{7}$.

$$10 : \frac{4}{7} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2} = 17.5$$

не подходит. Число рабочих — натуральное число. (*)

3) $\frac{7x}{2} = 3, \quad 7x = 6, \quad x = \frac{6}{7}$.

$$10 : \frac{6}{7} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} \quad (*)$$

4) $\frac{7x}{2} = 4, \quad 7x = 8, \quad x = \frac{8}{7}$
 $10 : \frac{8}{7} \quad (*)$

Ответ: 11 фредок 1

Черновик

② abc

$$\overline{abc} - \overline{acb} : 72$$

$$\overline{100a+10b+c} - \overline{100a-10c-b} = 9b-9c : 72$$

$$= 9(b-c)$$

Значит $b-c : 8$

$$\begin{matrix} b=9 & c=1 \\ b=8 & c=0 \\ b=c \end{matrix}$$

Всего 18 чисел.

$$\left[\begin{array}{lll} b=9 & c=1 & 9 \text{ вар} \\ b=8 & c=0 & 9 \text{ вар} \\ b=1 & c=9 & 9 \text{ вар} \\ b=0 & c=8 & 9 \text{ вар} \\ b=c & & 90 \text{ вар.} \end{array} \right.$$

100
111
222
133
144
155
166
177
188
199
10

Числа: 191 180
291 280
391

991 980
9 9

В условии задачи не сказано, что цифры a, b и c различны, поэтому всего таких чисел 126.

Ответ: 126.

③ $(x, y) \in \mathbb{N}$

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$(x+y)(x+y+1)=2022-y$$

$$x^2+xy+xy+y^2+x+y+y=2022$$

$$x^2+2xy+y^2+x+2y=2022$$

$$(x+y)^2+(x+2y)=2022$$

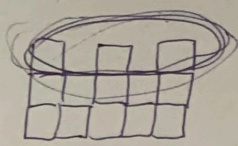
$$(x+y)^2=2022-x-2y$$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)}_{:2} \Rightarrow y : 2$$

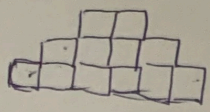
$$y=2 \quad (x+2)(x+3)=2020 \quad 2020=2$$

Черновик

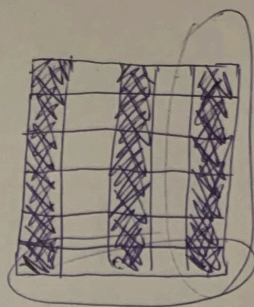
4



спереди



сбоку



18 кубиков.

8

5

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$0 - 99$$

$$D = a^2 - 8088$$

Чтобы уравнение имело хотя бы одно решение: $D \geq 0$

$$a^2 - 8088 \geq 0$$

Значит

$$a \geq 90$$

~~Поскольку решение 10 уравнений~~

$$1) \quad x^2 + 90x + 2022 = 0$$

$$D = 8100 - 8088 = 12$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{12}}{2} = -45 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = -45 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -45 + \sqrt{3} = -90$$

$$2) \quad x^2 + 91x + 2022 = 0$$

$$D = 91^2 - 8088 = \dots$$

$$x_1 = -91$$

Общая сумма корней: $-90 - 91 - 92 \dots - 99 =$

$$= -(90 + 91 + \dots + 99) = -\left(90 + \frac{91+99}{2} \cdot 9\right) =$$

$$= -\left(\frac{90+99}{2} \cdot 10\right) = (-945)$$

Ответ: -945 .

$$\begin{array}{r} 44 \\ 189 \\ \underline{5} \\ 945 \\ 45 \\ \underline{9} \\ 855 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \quad 8 \\ 89 \quad 64 \\ 89 \quad 7 \\ \hline 801 \\ 712 \\ \hline 7921 \end{array}$$

$$90 \times 90 = 8100$$

Черновики.

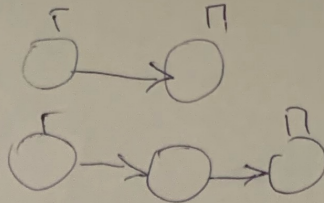
⑥ XXII

100 м.

40 порт от кажу

40 порт к кажу.

Гам. 37 → Пану



③ $x, y \in \mathbb{N}$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022; y:2$$

$(x+y)$ и $(x+y+1)$ два последовательных числа.

В диапазоне от 44 до 50

$\begin{array}{r} 41 \\ 41 \\ \hline 164 \\ 1681 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ 43 \\ \hline 129 \\ 1849 \end{array}$	$\begin{array}{r} 44 \\ 44 \\ \hline 220 \\ 176 \\ \hline 1980 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ 44 \\ \hline 172 \\ 172 \\ \hline 1892 \end{array}$	$\begin{array}{r} 46 \\ 47 \\ \hline 322 \\ 184 \\ \hline 2162 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ 46 \\ \hline 270 \\ 180 \\ \hline 2040 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ \times 46 \\ \hline 270 \\ 180 \\ \hline 1970 \end{array}$
---	---	---	---	---	---	--

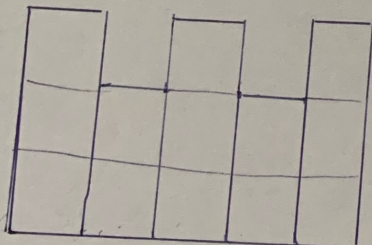
Значит $x+y=44$, а $x+y+1=45$.

$$\begin{array}{r} 2022 \\ 1980 \\ \hline 42 \end{array}$$

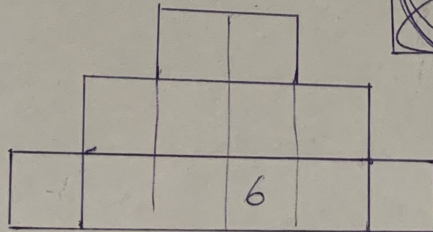
$$\begin{array}{l} y=42 \\ x=2 \end{array}$$

Ответ: (2; 42)

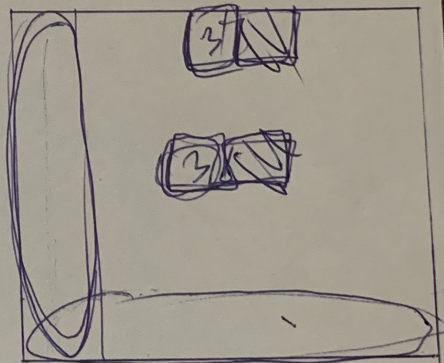
④



спереди



сбоку



⑩

6

$$\begin{array}{r} 2022 \\ 1892 \\ \hline 130 \end{array}$$

4

Черновик.

цифрами обознач.
высота

Пер.

		3			↑
				2	
			3		
	2				
1			3		

Бок

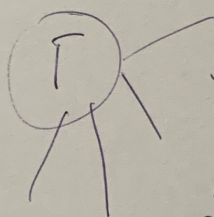
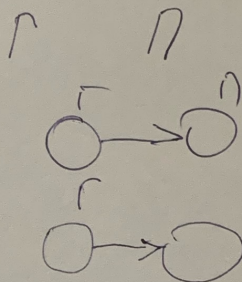
Ответ (7)

⑥

100 планет

40 →

40 ←



можно
попасть
на 40 других
планет.

И там нет Пандоры
С ~~этой~~ каждой из этих планет
нельзя попасть на Гачатею-37. Но
можно попасть на другие 40 ~~планет~~
~~есть~~ И предположим, что там тоже
не оказалась Пандора. Тогда
она среди 18 оставшихся планет.