МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори ВоробьевыГоры!»**

Профиль олимпиады: **ФИЗИКА**

ФИО участника олимпиады: **Богданов Яков Владимирович**

Класс: 11

Технический балл: **82**

1	2	3	4	Σ	итог
5	5	0	1	11	82
19	17	20	15	71	

Дата проведения: **26 марта 2021 года**

Задача

Чистовик,

Билет № 03.

Задание 1.

Вопрос.

Так как длина стержня постоянна, скорость его концов вдоль стержня. Значит, „другой" конец стержня тоже имеет скорость 0,5 м/с.

Косинус угла между скоростью и стержнем равен: $\frac{0,5\,м/с}{1\,м/с} = 0,5$, значит угол равен $\frac{\pi}{3}$ (или $\frac{2\pi}{3}$).

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Задача 1

Пусть: v - скор. сред. шар., v_1 - левого шара, v_2 - правого (нижнего), h - высота верхнего шарика.

$\Delta E_п = \Delta E_к$. $E_п = mgh$ $E_к = \frac{mv^2}{2}$

$E_{к.1} + E_{к.2} + E_к + \Delta E_{п.1} + \Delta E_{п.2} + \Delta E_п = 0$

$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mg(h-L) + mg\cdot\frac{h-L}{2} = 0$

$v_1^2 + v_2^2 + v^2 = 3g(L-h)$

$(2v_x)^2 + (2v_x)^2 + v^2 = 3g(L-h)$ $(\vec{v_1} + \vec{v_2} = 2\vec{v})$

$5v^2 = 3g(L-h)$

$v = \sqrt{0,6g(L-h)} = \sqrt{0,6gL(1-\sin\alpha)}$

$v_2 = 2v_x$

$v_2 = 2v\cdot\sin\alpha$ ($\vec{v}$ перпенд. второму стержню)

$v_2 = 2\sin\alpha\cdot\sqrt{0,6g(L-h)}$

$v_2 = 2\sin\alpha\cdot\sqrt{0,6gL(1-\sin\alpha)} \approx \sqrt{3}\cdot\sqrt{4,8\,(м/с)^2\cdot(1-0,866)} = 1,2\,(м/с)\cdot\sqrt{10\cdot 0,134}$

$v_2 \approx 1,2\cdot 1,16\,(м/с) = 1,39\,м/с$.

лист 1 из 6

$(\vec{v_2} + \vec{v_1} = 2\vec{v},\ v_{2x} = 0,\ v_{1x} = 0)$

Чистовик

$(E_{к.1}+E_{к.2}+E_{к}+\Delta E_{п.1}+\Delta E_{п.2}+\Delta E_{п})'=0$

$mv_1a_1+mv_2a_2+m(\vec{v}\cdot\vec{a})+mg\,v_{1y}+0+mg\,v_y=0$

$v_1a_1+v_2a_2+(\vec{v}\cdot\vec{a})=g|v_1|+g|v_y|$ $\cancel{(\vec{v}}$

$v_1a_1+v_2a_2+(v_xa_x+v_ya_y)=g\,v_1+g|v_y|$

$4v_xa_x+4v_ya_y+v_xa_x+v_ya_y=2g|v_y|+g|v_y|$ $(\vec{a}_1+\vec{a}_2=2\vec{a},\ \vec{v}_1+\vec{v}_2=2\vec{v})$

$v_xa_x+v_ya_y=0{,}6g(-v_y)$ $\leftarrow 0{,}6g\cdot(-v_y)$

$a_{ц.}=\frac{v^2}{R}=\frac{2v^2}{L}$ $a_{ц.}=a_x\cdot(-\cos\alpha)\mp a_y\cdot(\sin\alpha)$

$\begin{cases} v_xa_x+v_ya_y=0{,}6g\cdot(-v_y) \\ a_{ц.}=-a_x\cos\alpha\mp a_y\cdot\sin\alpha \end{cases}$

$\frac{v_x}{v_y}=-tg\,\alpha$ (постоян. длин. стерж.)

$\cancel{\begin{cases} -a_x tg\alpha\mp a_y=0{,}6g \\ -a_x\cos\alpha\mp a_y\cdot\sin\alpha=\frac{2v^2}{L} \end{cases}}$

$\cancel{(-a_x tg\alpha+a_y)\cdot\sin\alpha+(-a_x\cos\alpha\mp a_y\sin\alpha)=0{,}6g\sin\alpha+}\frac{2v^2}{L}$

$\cancel{-a_x(\cos\alpha+tg\alpha\cdot\sin\alpha)=0{,}6g\sin\alpha+\frac{2}{L}\cdot(0{,}6g(L-h))}$

$\cancel{a_x\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=0{,}6g(\sin\alpha-2(1-\sin\alpha))}$

$\cancel{a_x=0{,}6g\cdot(3\sin\alpha-2)\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=}$

$\begin{cases} v_xa_x+v_ya_y=0{,}6g\cdot(-v_y) \\ -a_x\cos\alpha-a_y\cdot\sin\alpha=a_{ц} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_x\cdot tg\alpha-a_y=0{,}6g \\ a_x\cos\alpha+a_y\sin\alpha=-\frac{2v^2}{L} \end{cases}$

$(a_x\cdot tg\alpha-a_y)\cdot\sin\alpha+(a_x\cos\alpha+a_y\sin\alpha)=0{,}6g\sin\alpha-\frac{2v^2}{L}$

$a_x(tg\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha)=0{,}6g\sin\alpha-\frac{2}{L}\cdot(0{,}6\cdot g(L-h))$

$a_x\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=0{,}6g(\sin\alpha-2(1-\sin\alpha))$

$a_x=0{,}6g\cdot\cos\alpha\cdot(3\sin\alpha-2)$ $(\vec{a}_1+\vec{a}_2=2\vec{a},\ a_{2y}=0,\ a_{1x}=0)$ $\cdot(2{,}598-2)=6\cdot 0{,}598$ м/с. $\approx 3{,}6$ м/с.^{2}

$a_2=a_x\cdot 2=1{,}2g\cos\alpha(3\sin\alpha-2)=12$ (м/с.^{2}) $\cdot 0{,}5\cancel{(5{,}196-2)=6\cdot 3{,}2\ м/с^2=19{,}2\ м/с^2}$

Ответ: 1,39 м/с. и 3,6 м/с.

лист 2 из 6

Задание 2 Чистовик.

Вопрос.

$dA = PdV \qquad dU = \nu C_V dT = \frac{C_V}{R} \cdot d(PV)$

$\frac{P}{V} = const \Rightarrow \left(\frac{P}{V}\right)' = 0 \Rightarrow V^{-2}(PdV - VdP) = 0 \Rightarrow PdV = VdP$

$dU = \frac{C_V}{R} \cdot d(PV) = 1{,}5 \cdot (PdV + VdP) = 3PdV = 3dA \Rightarrow \Delta U = 3A$

Ответ: увеличилась на 3кДж.

Задача.

Вопрос: „Найти КПД цикла".

Пусть: 1-2 и 3-4 — изотермы при температурах T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$).

процессы

$T_2 = nT_1 \qquad A_{34} = k \cdot (-A_{41})$

$\Delta U_{12} = \Delta U_{34} = 0$

$\Delta U_{23} = -\Delta U_{41} = \nu C_V (T_2 - T_1)$

$A_{23} = -A_{41} = 3\Delta U_{23}$

~~изот~~

$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV = \nu R T_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$A_{34} = \nu R T_2 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \nu R T_2 \cdot \ln\left(\left(V_2 \cdot \sqrt{\frac{P_3 V_2}{P_2 V_3}}\right) / V_4\right) = -\nu R T_2 \cdot \ln\left(\left(V_2 \cdot \sqrt{\frac{P_3 V_3}{P_2 V_2}}\right) / V_4\right)$

$A_{34} = -\nu R T_2 \cdot \ln\left((V_2 \cdot \sqrt{n}) / V_4\right) = -\nu R T_2 \cdot \ln\left((V_2 \cdot \sqrt{n}) / (V_1 \cdot \sqrt{n})\right) = -\nu R T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

$A_{34} = -n A_{12}$

$A_n = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = A_{12} + A_{34} = A_{34}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$A_з = Q_{34} + Q_{23} = A_{34} + A_{23} + \Delta U_{23} = A_{34} + \frac{4}{3} \cdot A_{23} = A_{34} + \frac{4}{3} \cdot \frac{A_{34}}{k} = A_{34}\left(1 + \frac{4}{3k}\right)$

$\eta = \frac{A_n}{A_з} = \frac{A_{34}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{A_{34}\left(1 + \frac{4}{3k}\right)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) / \left(1 + \frac{4}{3k}\right) = \frac{3k(n-1)}{n(3k+4)} = 0{,}3$

Ответ: 0,3.

лист 3 из 6

Задание 3. Чистовик.

Вопрос.

$U = lE \quad (= \int_0^l E\,dl)$

$U = lE = 0{,}4\,м \cdot 60\,В/м = 24\,В$

Ответ: 24 В.

Задача.

Потенциалы цилиндров (пропорц.) линейно зависят от зарядов на них, т.е.:

$$\begin{cases} \varphi_1 = k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 \\ \varphi_2 = k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + k_{23}q_3 \\ \varphi_3 = k_{31}q_1 + k_{32}q_2 + k_{33}q_3 \end{cases}$$

В силу симметрии цилиндров: $k_{11} = k_{22} = k_{33}$, $k_{12} = k_{13} = k_{21} = k_{23} = k_{31} = k_{32}$.

Пусть: $\alpha := k_{11}$, $\beta := k_{12}$, $\gamma := \frac{\alpha}{\beta}$, q = нач. заряды 1и 2цил..

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha q_1 + \beta(q_2 + q_3) = \beta(\gamma q_1 + q_2 + q_3) \\ \varphi_2 = \alpha q_2 + \beta(q_3 + q_1) = \beta(\gamma q_2 + q_3 + q_1) \\ \varphi_3 = \alpha q_3 + \beta(q_1 + q_2) = \beta(\gamma q_3 + q_1 + q_2) \end{cases}$$

$U = |\varphi_1 - \varphi_3| = |\beta(q_1(\gamma - 1) + q_2(1-1) + q_3(1-\gamma))| = |\beta q_1(\gamma - 1)|$

$q_3' = -\frac{\varphi_3}{\alpha} = -\frac{\beta(q_1 + q_2)}{\alpha} = -2\gamma^{-1}q$

$U' = |\varphi_1' - \varphi_3'| = |\beta(q_1 - q_3')(\gamma - 1)| = |\beta q(1 + \frac{2}{\gamma})(\gamma - 1)|$

$\frac{U'}{U} = (1 + \frac{2}{\gamma}) \quad (\geq 0)$

$\gamma = \frac{-2}{1 - \frac{U'}{U}} = \frac{2U}{U' - U}$

$\Delta q_2 = -\frac{\varphi_2'}{\alpha} = -\gamma^{-1}(q_1 + \gamma q_2 + q_3') = -q_2 - \gamma^{-1}(q_1 + q_3')$

$q_2' = q_2 + \Delta q_2 = -\gamma^{-1}(q_1 + q_3')$

$q_1' = q_1 + \Delta q_1 = q_1 - \frac{\varphi_1'}{\alpha} = q_1 - \gamma^{-1}(\gamma q_1 + q_2' + q_3') = -\gamma^{-1}(q_2' + q_3')$

$U_к = |\varphi_{1к} - \varphi_{3к}| = |\beta(q_1'(\gamma - 1) + q_2'(1-1) + q_3(1-\gamma))| = |\beta(q_1' - q_3')(\gamma - 1)|$

$U_к = |\beta(-\gamma^{-1}(q_2' + q_3') - q_3')(\gamma - 1)| = |\beta(-\gamma^{-1}(-\gamma^{-1}(q_1 + q_3')) - q_3'(1 + \gamma^{-1}))(\gamma - 1)|$

Чистовик.

$$U_K = \left|\beta\left(\gamma^{-2}(q_1+q_1') - q_3'(1+\gamma^{-1})\right)(\gamma-1)\right| = \left|\beta\left(\gamma^{-2}q_1 + 2\gamma^{-1}q(1+\gamma^{-1}-\gamma^{-2})\right)(\gamma-1)\right|$$

$$U_K = U\cdot\left|\gamma^{-2} + 2\gamma^{-1}(1+\gamma^{-1}-\gamma^{-2})\right| = U\cdot\left|\gamma^{-1}(2+3\gamma^{-1}-2\gamma^{-2})\right|$$

(сокращ. формулы)

$$U_K = U\cdot\left|\frac{U-U'}{2U}\left(2+3\cdot\frac{U-U'}{2U} - 2\left(\frac{U-U'}{2U}\right)^2\right)\right|$$

$$U_K = \left|\frac{1}{4U^2}\cdot(U-U')\left(4U^2+3U(U-U') - (U-U')^2\right)\right| = \left|\frac{U-U'}{4U^2}\cdot\left(6U^2 - UU' - U'^2\right)\right|$$

$$U_K = U\cdot\left|\gamma^{-1}(2+3\gamma^{-1}-2\gamma^{-2})\right| = U\left|\frac{1}{4}\left(2+\frac{3}{4}-\frac{2}{16}\right)\right| = 10\text{В}\cdot\left|2+\frac{5}{8}\right| = \frac{210}{8}\text{В} = 26{,}25\text{В}$$

Ответ: 26,25В.

лист 5 из 6

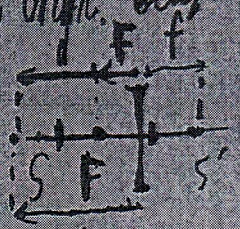
Задание 4 Чистовик.

Вопрос:

$D=\frac{1}{F}$, где D – оптическая сила (дптр), F – фокусное расст. (м).

Задача. Прямая SS' содержит фокус и центр линзы, значит наход. на главной опт. оси.

$\frac{1}{f}+\frac{1}{d}=\frac{1}{F}$ (d – расст. изобр.)



$f>0$ ⇒ изображение действительное

$f-f'=2F$, $\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\pm\frac{1}{F}$, $f=F+d$ (d из усл.)

~~рассеив. линза~~

$f-f'=2F$ (собир. линза)

$(F+d)-f'=2F$

$f'=d-F$ $d=\pm15$ см

$\frac{1}{F+d}+\frac{1}{d-F}=\pm\frac{1}{F}$

$\frac{2d}{d^2-F^2}=\pm\frac{1}{F}$

$d^2-F^2=\pm2dF$

$F^2\mp2dF+d^2=0$

$F=\frac{\pm2d\pm\sqrt{(2d)^2+4d^2}}{2}$

$F=d(\pm1\pm\sqrt{2})$

$F=|d|(\sqrt{2}\pm1)$ $(F\geq0)$

~~$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=-\frac{1}{F}$, $f-f'=2F$, $f=F+d$~~

~~$f-f'=2F\Rightarrow F+d-f'=2F$~~

~~$f'=d-F$~~

~~$\frac{1}{F+d}+\frac{1}{d-F}=-\frac{1}{F}$~~

~~$\frac{2d}{d^2-F^2}=-\frac{1}{F}$~~

~~$d^2-F^2=-2dF$~~

~~$F^2-2dF-d^2=0$~~

~~$F=d(1\pm\sqrt{2})$~~

~~$F=|d|(\sqrt{2}\pm1)$ $(F\geq0)$~~

Независимо от выбора линзы, фокус. ~~расст.~~ расст. $=|d|(\sqrt{2}\pm1)$.

$D=\frac{1}{F}=\frac{1}{|d|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}\pm1}=\frac{\sqrt{2}\mp1}{|d|}$

$\frac{\sqrt{2}+1}{15\text{ см}}\approx16{,}1$ дптр $\frac{\sqrt{2}-1}{15\text{ см}}\approx2{,}76$ дптр

Ответ: 16,1 дптр, 2,76 дптр.

$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}$ (при соб. линзе и действ. изобр. или при рассеив. линзе и мнимом изображ.)

$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=-\frac{1}{F}$ (иначе)

лист 6 из 6