МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори ВоробьевыГоры!»**

Профиль олимпиады: **ФИЗИКА**

ФИО участника олимпиады: **Медведев Михаил Станиславович**

Класс: 11

Технический балл: **76**

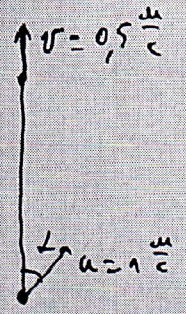
1	2	3	4	Σ	итог
5	5	0	3	13	76
20	20	3	20	63	

Дата проведения: **26 марта 2021 года**

Чистовик

Задание 1

Ответ на вопрос:



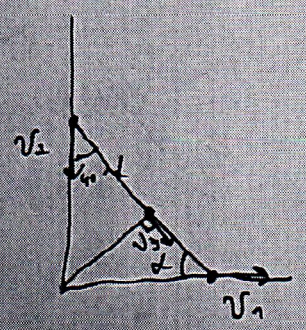
Так как стержень жёсткий, то его длина не меняется, значит проекции скоростей точек стержня на стержень должны быть одинаковыми:

$$v = u\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{v}{u} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{v}{u} = 60^\circ$$

Ответ: под углом 60°

Задача:



Так как длинный стержень жёсткий, то его длина не меняется, то проекции скоростей точек стержня на стержень должны быть одинаковы:

$$v_1\cos\alpha = v_2\sin\alpha$$

$$v_2 = v_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Представим движение стержня как движение его центра масс со скоростью $\vec{v_c}$ и вращением вокруг центра масс (середины стержня) с угловой скоростью ω. Тогда:

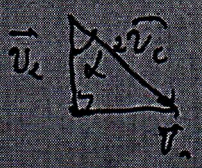
$$\vec{v_2} = \vec{v_c} + \vec{v_{вр}}$$

$$\vec{v_1} = \vec{v_c} - \vec{v_{вр}}$$

, где $|\vec{v_{вр}}| = \omega\frac{L}{2}$ – скорость вращательного движения массивных шариков на конце стержня (~~они равны~~ вращательные скорости, но противоположны по направлению)

$$\vec{v_c} = \frac{\vec{v_1} + \vec{v_2}}{2}$$

$$v_c = \frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1}{2\sin\alpha}$$



Так как третий шарик находится в середине, то его скорость равна

$$\vec{v_3} = \vec{v_c}$$

$$|\vec{v_3}| = \frac{v_1}{2\sin\alpha}$$

К тому же $\vec{v_3}$ перпендикулярен короткому стержню, значит такое движение возможно (иначе бы существовала бы проекция скорости $\vec{v_3}$ на короткий стержень, а это противоречит тому, что стержень нежёсткий.)

Теперь запишем закон сохранения энергии для всей системы:

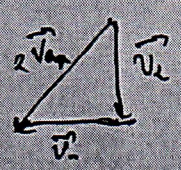
$$mgL + mg\frac{L}{2} = mgL\sin\alpha + mg\frac{L}{2}\sin\alpha + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}$$

$$\frac{3}{2}mgL(1-\sin\alpha) = \frac{mv_1^2}{2\sin^2\alpha} + \frac{1}{4}\frac{mv_1^2}{2\sin^2\alpha}$$

$$\frac{3}{2}\cancel{m}gL(1-\sin\alpha) = \frac{5}{4}\frac{\cancel{m}v_1^2}{2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{12}{5}gL(\sin^2\alpha - \sin^3\alpha)} \approx 1{,}4\ \frac{м}{с}}$$

$$\vec{v_{ср}} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{2}$$



$$v_{ср} = \frac{1}{2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1}{2\sin\alpha} = \omega\frac{L}{2}$$

$$\omega = \frac{v_1}{L\sin\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Продифференцируем выражение для v_1:

$$\dot{v}_1 = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{\frac{12}{5}gL(\sin^2\alpha - \sin^3\alpha)}}\cdot\frac{12}{5}gL\left(2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} - 3\sin^2\alpha\overset{-\cos\alpha}{\frac{d\alpha}{dt}}\right)} =$$

$$= \cancel{\frac{6}{5}gL\left(2\cos\alpha\frac{v_1}{L}\right.} -$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{12}{5}gL(\sin^2\alpha - \sin^3\alpha)}}\cdot\frac{12}{5}gL\left(2\sin\alpha - 3\sin^2\alpha\right)\cdot\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} =$$

$$= \frac{\frac{6}{5}g\cancel{L}\left(2\cos\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha\right)\frac{\cancel{v_1}}{\cancel{L}}}{\cancel{v_1}} = \frac{6}{5}g\left(2\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin 2\alpha\right) =$$

Ускорение нижнего стержня:

$$\boxed{a = \frac{6}{5}g\left(2\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin 2\alpha\right) \approx -3{,}5\ \frac{м}{с^2}}$$

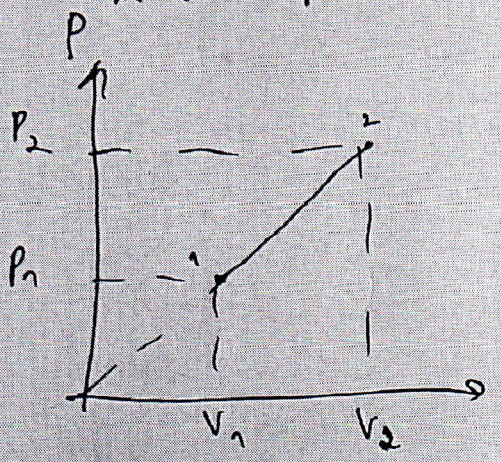
Чистовик

Лист 3

То есть шарик будет тормозить

Задача № 2

Ответ на вопрос:



так как $p = \alpha V$: $P_1/V_1 = P_2/V_2 \Rightarrow P_1V_2 = P_2V_1$

Работа газа равна площади под графиком:

$$A = \frac{1}{2}(P_1+P_2)(V_2-V_1) = \frac{1}{2}(P_2V_2 - P_1V_1 + P_1V_2 - P_2V_1) =$$

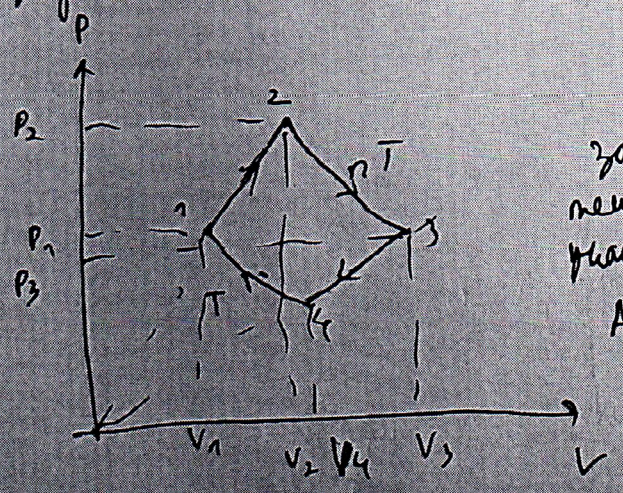
$$= \frac{1}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1)$$

(T_i – температура в точке i)

Изменение внутренней энергии:

$$\boxed{\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 3A = 3\text{ кДж}}$$

Задача:



Так как работа на линейных участках зависит только от начальной и конечной температуры, то работа совершаемая на участках с линейной зависимостью равны:

$$A_{12} = |A_{34}| = \frac{1}{2}\nu RT(n-1)$$

(ν – кол-во молей газа)

Найдём работу в изотермическом процессе 2-3:

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p\,dV = n\nu RT\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V} = n\nu RT\ln\frac{V_3}{V_2}$$

в процессе 1-4:

$$A_{1-4} = \nu RT\ln\frac{V_4}{V_1}$$

Так как 1-4 и 2-3 изотермы:

$P_1V_1 = P_4V_4$

$P_2V_2 = P_3V_3$

так как 1-2 и 4-3 линейны:

$P_1/V_1 = P_2/V_2$

$P_3/V_3 = P_4/V_4$

Отсюда:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$$

Значит:

$$A_{14} = \nu RT \ln\frac{V_4}{V_1} = \nu RT \ln\frac{V_3}{V_2} = \frac{A_{23}}{n}$$

Так как на линейном участке $\Delta U = 3A$ теплота подведённая к телу в процессе 1-2 равна:

$$Q_{12} = 4A_{12}$$

КПД цикла:

$$\eta = \frac{A_{1234}}{Q_+} = \frac{\cancel{A_{12}} + A_{23} - \cancel{A_{34}} - A_{14}}{4A_{12} + A_{23}} = \frac{A_{23} - A_{14}}{4A_{12} + A_{23}}$$

По условию: $A_{23} = kA_{12}$

$$\boxed{\eta = \frac{k\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{4 + k} = \frac{k(n-1)}{n(k+4)} = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{\eta \approx 16{,}7\%}$$

Чистовик

Лист 5

Задание 4

Ответ на вопрос: Связь оптической силы и фокусного расстояния линзы выражается формулой:

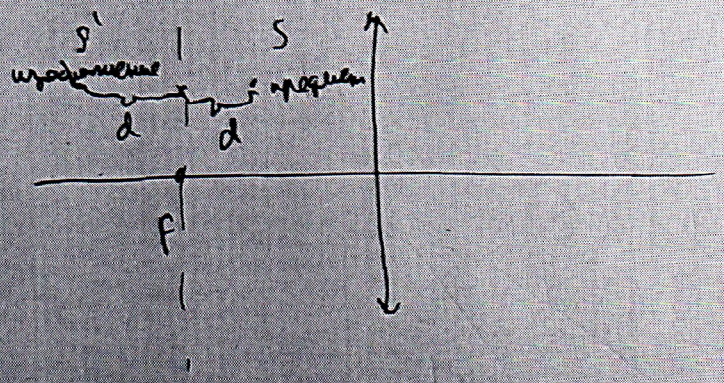
$$D = \frac{1}{F}$$ (D - оптическая сила, F - фокусное расстояние линзы)

Задача:

~~Сначала~~ Так как изображение прямое, то либо линза рассеивающая, либо линза собирающая и предмет находится на расстоянии от линзы меньшем фокусного расстояния, ~~а линза собирающая~~

(Я знаю что предмет и изображение лежат на разных высотах, но я нарисовал на одной так как это в задаче не важно)

Сначала рассмотрим случай собирающей линзы:



По формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F-d} - \frac{1}{F+d} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{2d}{F^2-d^2} = \frac{1}{F}$$

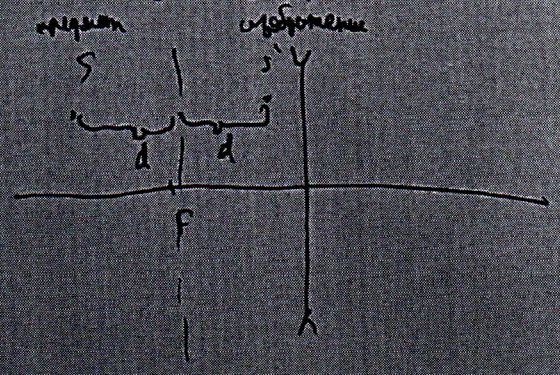
$$F^2 - d^2 - 2Fd = 0$$

$$F = d(1 \pm \sqrt{2})$$

Так как $F > 0$, то

$$F_1 = d(1+\sqrt{2})$$

Теперь рассеивающая:



По формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{F+d} - \frac{1}{F-d} = -\frac{1}{F}$$

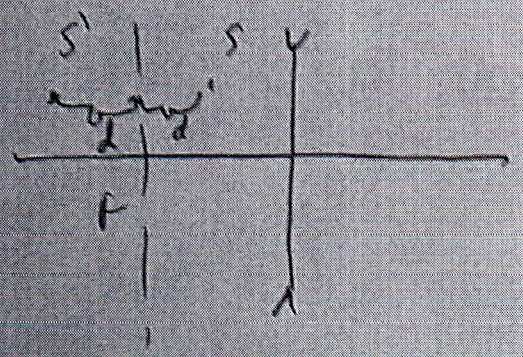
$$F^2 - 2Fd - d^2 = 0$$

~~$F_2 = F_1 = d(1+\sqrt{2})$~~

$$F_2 = d(\sqrt{2}+1) = F_1$$

Второй корень также не подходит

Чистовик



такой конфигурации быть все может, так как изображение в рассеивающей линзе ближе к линзе чем предмет

Значит есть только два значения оптической силы:

$D_1 = \frac{1}{F_1}$ $D_2 = -\frac{1}{F_2}$

$D_1 = \frac{1}{d(\sqrt{2}+1)}$ $D_2 = -\frac{1}{d(\sqrt{2}+1)}$

$$\boxed{D_1 \approx 2{,}7 \text{ дптр} \quad D_2 = -2{,}7 \text{ дптр}}$$

~~Задание 3.~~

~~Черновик~~

Черновик

Значит возможно единственное значение оптической силы:

$$D = \frac{1}{F_n} = \frac{1}{d(n+\sqrt{2})} =$$

$$\cancel{\frac{1}{F}} \quad \frac{1}{F-d} - \frac{1}{F+d} = \frac{1}{F}$$

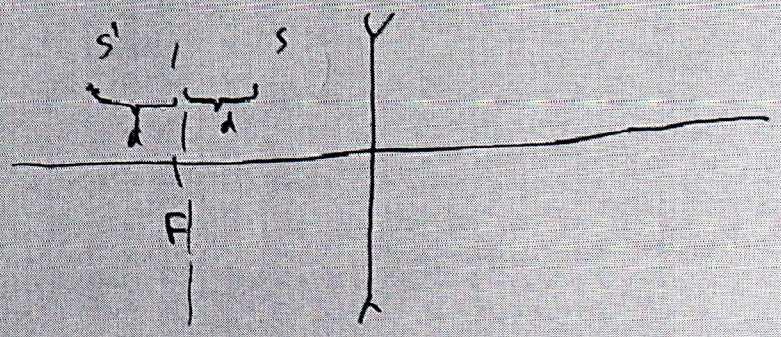
$$= \frac{2d}{F^2-d^2} = \frac{1}{F}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

$$b = \frac{aF}{a+F} > F$$

~~Чистовик~~ Черновик

Но может быть другая конфигурация:



$$\frac{1}{F-d} - \frac{1}{F+d} =$$

Черновик

Лист 9

$|\vec{v}_1| = \frac{v_4}{\sin\alpha}$

К тому же $\vec{v}_1$ перпендикулярна короткому стержню, значит такое движение возможно (если б это было не так, то проекция скорости шарика на направление короткого стержня не равнялась нулю, а это противоречит тому что стержень жёсткий)

Теперь запишем закон сохранения энергии для всей системы:

$$mgL + mg\frac{L}{2} = mgL\sin\alpha + mg\frac{L}{2}\sin\alpha + \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}$$

$$mgL(1-\sin\alpha) = \frac{mv_1^2}{\sin^2\alpha}$$

$$v_1 = \sin\alpha\sqrt{\frac{3}{2}gL(1-\sin\alpha)}$$

$$v_{\text{ш}} = \sqrt{v_2^2+v_3^2} = \frac{v_1}{2}$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2}$$

$$v_3 = \frac{v_1}{2}$$

$$\frac{v_4}{\sin\alpha}$$

$$KA = \nu RT \ln\frac{V_4}{V_2}$$

$$A' = \nu RT \ln\frac{V_4}{V_2}$$

$$p_2V_2 = p_4V_4$$

$$p_2V_2 = \nu RT$$

$$p_4V_4 = \nu RT$$

$$Q_+ - Q_- = A$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_-|}{Q_+}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}$$

$$\eta = 1 - \frac{p_4V_4}{p_2V_2}$$

$$\eta = 1 - \frac{p_4V_4}{\nu RT}$$

$$\eta = 1 - \frac{p_4V_4}{p_2V_2}$$

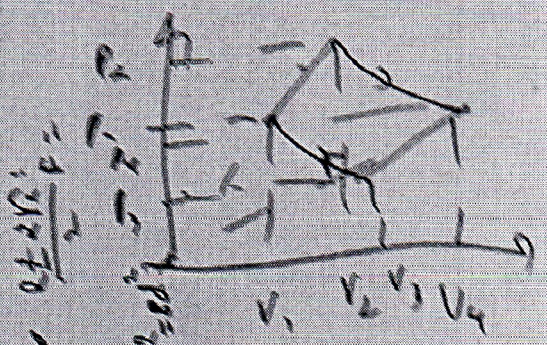
$$p_2V_2 = p_4V_4$$

$$p_2V_2 = \nu RT$$

$$p_4V_4 = \nu RT

Лист 10

Черновик



$P_1/V_1 = P_2/V_2$

$P_3/V_3 = P_4/V_4$

$P_1V_1 = P_3V_3$

$P_2V_2 = P_4V_4$

$\frac{1}{F-d} - \frac{1}{d+F} = \frac{1}{F}$

$\frac{1}{36} - \frac{2d}{F^2-d^2} = \frac{1}{F}$

$F^2 - 2Fd - d^2 = 0$

$D = 12d^2$

$F = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}d}{2} = d(1 \pm \sqrt{3})$

$\cancel{P_1P_2V_1V_2 = P_3P_4V_3V_4}$

$\cancel{P_1P_3/(V_1V_3) = P_4V P_2P_4}$

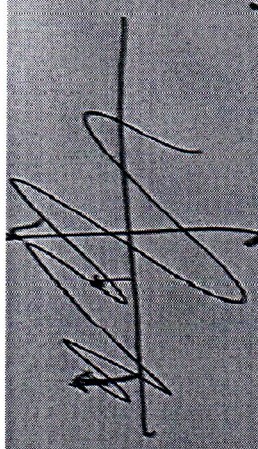
$\cancel{P_1P_4}$

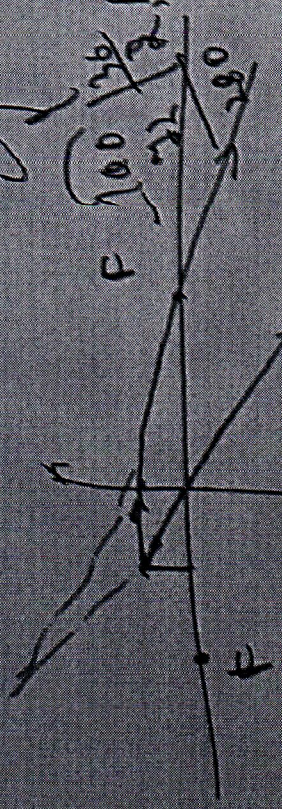
$\frac{P_1P_4}{V_1V_4} = \frac{P_2P_3}{V_2V_3}$

$P_1P_4V_4V_1 = P_2P_3V_2V_3$

$V_4V_1 = V_2V_3$

$\frac{V_4}{V_2} = \frac{V_3}{V_1}$





Лист 11

Теория

$U = \varkappa q - \varkappa q - \varkappa_1$

$U = \varkappa q + \varkappa' q - 2\varkappa q =$

$= (\varkappa' - \varkappa) q$

$U = 2\varkappa q$

$U' =$

$U = 2\varkappa q - \varkappa q + \varkappa q$

$U = 2\varkappa q$

$\varkappa' q_3 + 2\varkappa q = 0$

$q_3 = -\frac{2\varkappa}{\varkappa'} q$

$\frac{1}{d+F} + \frac{1}{d-F} = \frac{1}{F}$

$\frac{2d}{d^2-F^2} = \frac{1}{F}$

$2Fd = d^2 - F^2$

$F^2 + 2Fd - d^2 = 0$

$D = 4F^2$

$D = 4d^2 + 8d^2 = 12d^2$

$F = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}d}{2} = d(1+\sqrt{3})$

$d^2 = 3F$

$d = \sqrt{3}F$

$F = d(\sqrt{3}-1)$

$\frac{2F}{F^2 - d^2} = \frac{1}{F}$

$-2F^2 = F^2 - d^2$

$\frac{v_1}{L\cos\alpha} = \frac{v_2}{L\sin\alpha}$

$v_2 = v_1 \operatorname{tg}\alpha$

$v_3 = \omega \frac{L}{2}$

$v_3 = \frac{v_1}{2\cos\alpha}$

$v_3 = \frac{v_2}{2\cos\alpha}$

$\omega L = v_2 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha = \frac{v_2}{\cos\alpha}$

$\frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

$\frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$

$1 - \cos 30 = r$

$\frac{v_1}{L\cos\alpha} = \frac{v_2}{L\sin\alpha}$

$v_2 = v_1 \operatorname{tg}\alpha$

$v_3 = \omega \frac{L}{2}$

$v_3 = \frac{v_1}{2\cos\alpha}$

$v_3 = \frac{v_2}{2\cos\alpha}$

$\omega L = v_2 \sin\alpha + v_1 \cos\alpha = \frac{v_2}{\cos\alpha}$

$\frac{1}{d+F} + \frac{1}{d-F} = \frac{1}{F}$

$\frac{1}{d+F} + \frac{1}{F-d} = \frac{1}{F}$

$\frac{2F}{F^2 - d^2} = \frac{1}{F}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3