МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Торопин Иван Павлович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Торопин Иван Павлович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	15 баллов	5 баллов	20 баллов	80 баллов

Чистовик 1 №2. Вариант 2.

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Знаем, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ОДЗ: $x \in [-1;1]$

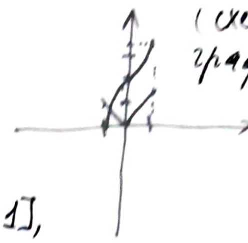
$-\arcsin x = \arccos x - \frac{\pi}{2}$

$|x| - \arcsin x + b\arccos x + b|x| - b + a = 0$

$|x| + \arccos x - \frac{\pi}{2} + b\arccos x + b|x| - b + a = 0$

$(b+1)(|x| + \arccos x) - b - \frac{\pi}{2} + a = 0$

Т.к. $x \in [-1;1]$, то $|x| + \arccos x \in [0; \pi+1]$



(схематичный график)

Посмотрим, что будет при $b = -1$

Тогда выражение будет верно при $\forall x \in [-1;1]$,

при ~~всех~~ нужном нам значении a

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

При $b \neq -1$

$(b+1)(|x| + \arccos x) = b+1$

$|x| + \arccos x = 1$ ~~При~~ Всегда будет подходить $x = 1$

$1 + \arccos 1 = 1$ Значит, такое значение $a = \frac{\pi}{2} - 1$

0

$1 = 1$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

Чистовик 3 №3.

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$$

Пусть $t = x^2-3$

$$t^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$$

Введем ф-ю $f(t)$

$f(t) = t^{\lg 2} - (t+1)\lg 2$ при $t \in [0;+\infty)$

Если у $f(t) \geq 3$ корня, то у $f'(t) \geq 2$ корня (между корнями $f(t)$)

$f'(t) = \lg 2 \cdot t^{\lg 2 - 1} = \lg 2(a^{\lg 2 - 1} - 1)$, но здесь имеем один корень при $a \in [0;+\infty)$, значит у $f(a)$ не более 2 корней.

Заметим, что $f0 = 0^{\lg 2} - \lg 2 < 0$

$f(1) = 1^{\lg 2} - 2\lg 2 = 1 - \lg 4 > 0$, т.к. $4 < 10$

Из этого можно сделать вывод, что $t^{\lg 2}$ растет медленнее, чем $(t+1)\lg 2$, а значит $\exists$ такое b, что $f(b) < 0$

Получая, что f непрерывна на $(0;1)$, значит там есть корень и на $(1;b)$ есть корень $\Rightarrow$ у $f(t)$ есть 2 корня, а значит у $f(t)$ ровно 2 корня. Т.к. замена была $x^2-3=t$, то имеем, что если у нас есть 2 значения $t \geq 0$, то получим 4 значения x

Ответ: 4 корня.

Чистовик 4 №4

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6 & \text{I} \quad \times z \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2 & \text{II} \quad \times y \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3 & \text{III} \quad \times x \end{cases} \Rightarrow$$

складываем и получаем

$$z^2(6xy-1)+y^2(2xz-1)+x^2(3yz-1)=0$$

Из условия полученного ниже

$$\begin{cases} xy=\frac{1}{6} \\ xz=\frac{1}{2} \\ yz=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2} \quad y^2=\frac{1}{9} \quad y=\pm\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \\ z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-\frac{1}{3} \\ x=-\frac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases}$$

Пусть $a=2x$ $b=3y$ $c=z$

$$\begin{cases} a-b+\dfrac{6}{ab}=6 & \text{IV} \\ 2b-2c+\dfrac{3}{bc}=3 & \text{V} \\ 3c-3a+\dfrac{2}{ac}=2 & \text{VI} \end{cases}$$

Пусть $a>0$, тогда из VI следует, что $c>0$, тогда из V следует, что $b>0$.

Аналогично из IV и V получаем, что если $a<0$, то $b<0$ и $c<0$

Тогда можем сделать вывод что $ab>0$ $bc>0$ $ac>0$

То есть $xy>0$ и $zx>0$ и $zy>0$

$$a-b=\frac{6ab-6}{ab}=\frac{6}{ab}(ab-1)$$

$$2b-2c=\frac{3bc-3}{bc}=\frac{3}{bc}(bc-1)$$

$$3c-3a=\frac{2ac-2}{ac}=\frac{2}{ac}(ac-1)$$

$$\begin{cases} a>b \iff ab\ge 1 \\ b>c \iff bc\ge 1 \\ c>a \iff ac\ge 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6xy\ge 1 \\ 2xz\ge 1 \\ 3yz\ge 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$; $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1\right)$

Чистовик 2.

№1.

Всех двузначных чисел с 20 по 99 = 99 - 20 + 1 = 80

Значит всего позиций в строке они будут занимать 160 соответственно

Всего трехзначных чисел 999 - 100 + 1 = 900

Позиций они будут занимать 900 · 3 соответственно.

Но 2700 > 2021

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

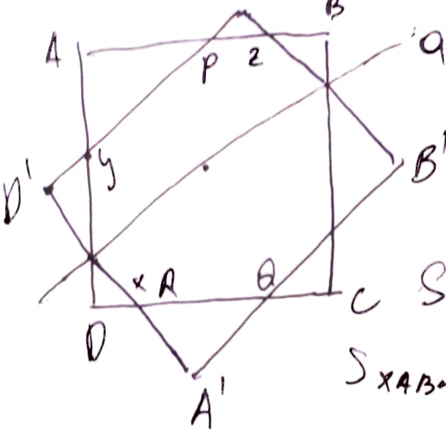
$1861 : 3 = 620$ ост. 1

Значит всего будет 620 трехзначных чисел. Последним из них будет 719.

Но потом останется одна цифра от 720

$\boxed{\text{Ответ: 7.}}$

Шиловин №5. №5.



ABCD — исходный кв.

A'B'C'D' — второй, симметричный относительно a

a — прямая сгиба

Искомая площадь равна

$S_{\Delta XD'Y} + S_{\Delta PC'Z} + S_{XABT}$

S_{XABT}, т.к. a проходит через центр исходного квадрата

Заметим, что при повороте на 90° $\Delta XDY'$ отн. O перейдет в $\Delta PC'Z$

Тогда $S_{\Delta XD'Y} = S_{\Delta PC'Z}$, а также $D'Y = C'Z$ $YX = ZP$

При повороте $\Delta DXR \to \Delta APY$, а раз $\Delta D'XY$ симметричен относительно ΔDXR, то $DR = D'Y = AY = C'Z$, а поэтому $AP = D'X = DY = PC'$

Пусть $AY = a$ $AP = b$, тогда $PY = \sqrt{a^2+b^2}$

$P_{C'} : D'Y + YP + C'P = AY + YP + AP = a+b+\sqrt{a^2+b^2}$

То есть искомая площадь
$S = \frac{17}{2} + S_{\Delta XD'X} + S_{\Delta PC'Z} = \frac{17}{2} + 2S_{\Delta APX} = \frac{17}{2} + 2\cdot\frac{ab}{2} = \frac{17}{2} + ab$.

Максимизируем ab

Пусть $a = m+k$ $b = m-k$

$a+b+\sqrt{a^2+b^2} = (m+k)+(m-k)+\sqrt{(m+k)^2+(m-k)^2} = 2m$
$= \sqrt{2m^2+2k^2} + 2m = \sqrt{17}$ $ab = m^2-k^2$. Заметим, что если $k>0$, то можем уменьшить k, тогда $2m + \sqrt{2m^2+2k^2} = \sqrt{17}$ $ab = m^2-k^2$, польза увеличится

Значит $a=b=x$ x^2 max

$x + x + \sqrt{2x^2} = 2x + \sqrt{2}x = (2+\sqrt2)x = \sqrt{17}$

$x = \frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt2} \Rightarrow \underline{ab_{max} = \frac{17}{(2+\sqrt2)^2}}$

$S_{max} = \frac{17}{2} + \frac{17}{6+4\sqrt2} = 34 - 17\sqrt2$

Все переходы были равносильны, значит пример единозначно существует. Ответ: $34-17\sqrt2$.

142

Горшочек

$$2xz - 6xy + \frac{z}{xy} + \frac{y}{xz} = 6z + 2y$$

$$\frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} + \frac{y}{xz} = 6z + 2y + 3x$$

$$x^2 + z^2 + y^2 = 6z^2xy + 2y^2xz + 3x^2yz$$

$$z^2(6xy-1) + y^2(2xz-1) + x^2(3yz-1) = 0$$

$$xy = \frac{1}{6} \quad xz = \frac{1}{2} \quad yz = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{6} \\ xz = \frac{1}{2} \\ yz = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$ $x = \frac{1}{6}y$ $y \neq 1$

$\frac{1}{6}y^2 = \frac{1}{6}$

$y = \pm 1$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

$x = \frac{3}{2}y$

$\frac{3}{2}y^2 = \frac{1}{6}$

$y^2 = \frac{1}{9}$

$y = \pm\frac{1}{3}$

$z = \pm\frac{1}{3}$

Пусть $xy = a$ $xz = b$

$yz = c$

xyz^2

$$2b - 3c + \sqrt{\frac{bc}{a}} = 6\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

a

$$2xz - 3yz + \frac{z}{xy} = 6z$$

$y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$, $z = 1$

$y = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, $z = -1$

$1 - 1 + 6 = 6$

Я получил это, но как это доказать?

Сержовин

Номер 1

1 | 10

~~№~~ 20. 20212223

2021 цифра

Всего двухзначних 20-100

81 цифра

81·2 - двузначные

162

100.

100 - 999

900·3 2700

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 162 \\ \hline 1859 \end{array}$$

1859 | 3

18 | 619

5

3

29

27

2

$$\begin{array}{r} 2700 \\ -\ 162 \\ \hline 2538 \end{array}$$

619

619 трехзначное число

1, 2, 3.

100, 101

101.

100 + (n-1)

100 + 618

718 719

Ответ: 1

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30

100 + (620 - 1)

719

$\left(3z-6x\cancel{z}+\frac{1}{xz}\right)\left(6y-2z+\frac{1}{yz}\right)$

~~Черновик~~

Черновик

$18zy\ \cancel{4z}-36xy$

$2x-3y+\frac{1}{xy}=6$

~~$2x^2z$...~~

$$\begin{cases} (1)\ 2xz-3yz+\frac{z}{xy}=6z \\ (2)\ 3zy-6xy+\frac{y}{xz}=2y \\ (3)\ 6yx-2xz+\frac{x}{yz}=3x \end{cases}$$

$z\left(6-\frac{1}{xy}\right)$

$y\left(2-\frac{1}{xz}\right)$

$x\left(3-\frac{1}{yz}\right)$

$6xy-1=$

$\frac{z}{xy}+\frac{y}{xz}+\frac{x}{yz}=6z+2y+3x$

$z^2(6xy-1)+y^2(2xz-1)+x^2(3yz-1)=0$

$z^2+y^2+x^2=6z^2xy+2y^2xz+3x^2yz$

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

$4x-6y+\frac{2}{xy}=12$

$18z-36x+\frac{6}{xz}=12$

$24y-8z$

$$\begin{cases} k\ \ 2x^2yz-3y^2xz+z=6xyz \\ c\ \ 3z^2xy-6x^2yz+y=2xyz \\ m\ \ 6xy^2z-2z^2xy+x=3xyz \end{cases}$$

$$\begin{cases} k\cdot 2-6\cdot c=0 \\ c\cdot 3-m2=0 \\ m\cdot 6-3\cdot k=0 \end{cases}$$

$k=3c$

$2m=k$

$2m=3c$

$k\cdot 2-6\cdot c=0$

$k-3c=0$

$c\cdot 3-2m=0$

$3m-k=0$

$34-14\sqrt{2}$ ... 2 ... $(2+\sqrt{}$