МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Арутюнян Нарине Игоревна**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Арутюнян Нарине Игоревна

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	95 баллов

Черновик

Лист. 1

20-99 - 20 чисел, занимающи по 180 цифр, относительно

$\times 180 \cdot 20 = 600$ ... 00

$2021 - 180 = 1841$

$80 \cdot 2 = 160$

2021 - 180 = 1841 цифра

$1841 : 3 = 613$ (ост. 2)

~~613~~ еще положится трехзначных

620 трехзнач. чисел, начиная ~~613~~: от 100, заканчивая до ~~720~~ 720 трехзначных чисел

$2021 - 160 = 1861$

$1861 : 3 = 620$ (ост. 1)

=> значит последнее выписанное число 712

и на 2021 месте первая цифра

Ответ: 7

число: 20212223

числа с 20 по 99 занимаемые в этом ряду первые $80 \cdot 2 = 160$ мест (на двухзнач.)

всего трехзначных чисел = 900

$100 - 19 = 80$

т.к. $900 \cdot 3$ (цифры) $= 2700$; ~~2700 > 2021 160 =~~

всего двухзначных $99 - 19 = 80$

$2021 - 160 = 1861$

$2700 > 1861$

Разделим 1861 на 3 =

$1861 : 3 = 620$ (ост. 1)

$1860 = 3 \cdot 620$

$620 + 99$ (двухзначны) $= 719$

=> возьмем числа от 100 до 719

таким образом заняты $1860 + 160 = 2020$ мест

=> 2021 место - первая цифра числа 719

=> Ответ: 7.

Черновик: лист. 2

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + x + |x| - 1) + a = 0$

$b = \frac{\arcsin x - |x| - a}{\arccos x + |x| - 1}$

$-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$ $0 < \arccos x < \pi$

$-1 \le x \le 1$

$x = -1$ $\arccos x = 0$

$\frac{-\frac{\pi}{2} - 1 - a}{0 + 1 - 1} = \frac{a - a}{\frac{\pi}{2} - 1}$

$x = -1$ $\frac{-\frac{\pi}{2} - 1 - a}{\pi + 1 - 1} = \frac{-\frac{\pi}{2} - 1 - a}{\pi}$

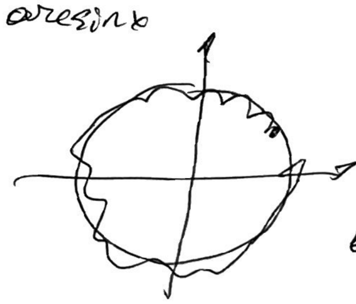
$x = 0$ $\frac{-a}{\frac{\pi}{2} - 1}$ $\arccos = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6}$

$x = 1$

$\frac{\frac{\pi}{2} - 1 - a}{0 + 1 - 1} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1 - a}{0}$

arcsin x



arccos

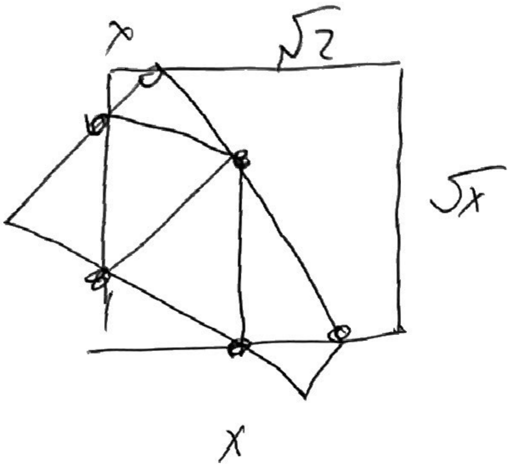
$\frac{\arcsin x - |x| - a}{\arccos x - |x| - a} =$

$\arcsin\frac{\pi}{2} - \arccos x$

$b = \frac{\arcsin - |x| - a}{\arccos + |x| - a}$

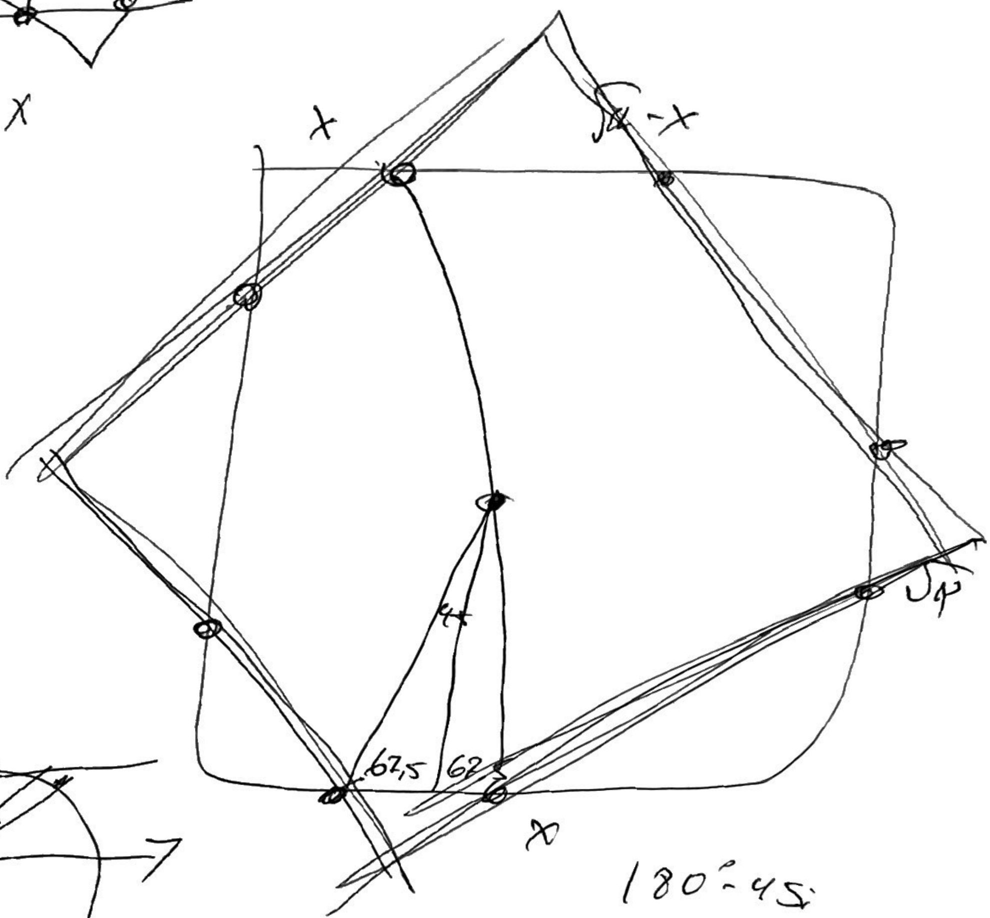
$b = 1 + \frac{\frac{\pi}{2} - a + 1}{\arccos x + |x| - 1}$

Черновик:

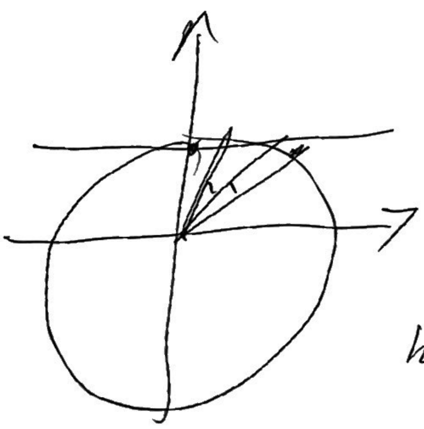


$2 \cdot ctg = 67{,}5$

$ctg(67{,}5 - tg1 + ctg(67{,}5' + \beta)$



$180° - 45°$



$h = ctg(67{,}5 - 1 =$

~~$1 - ctg + 65 +$~~

~~$1 - ctg\,67{,}5\,ctg$~~

$ctg\beta$

$$\frac{1 - ctg\alpha \cdot ctg\beta}{ctg\alpha \cdot ctg\beta} + \frac{-1 + ctg\alpha\, ctg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}$$

$2ctg(ctg^2\alpha - ctg^2\beta) \quad (-1 - ctg\alpha\, ctg\beta)/(ctg\alpha + ctg\beta)$

Олимпиада «ЛВГ»

Лист 1

Вариант 2

N1

Последовательность 20212223....
найти цифру на 2021 месте!

1. Всего двухзначных чисел с 20- по 99 = 80
т.к. 99 − 19 = 80
по две цифры ⇒ 80 · 2 = 160 (мест) − занимаемых двузначными числами
2. Всего трехзначных чисел = 900
по три цифры ⇒ 800 · 3 = 2700 (мест) − занимаемых трехзначными
Но, 2021 − 160 = 1861 (мест) для трехзначных
2700 > 1861 ⇒ все трехзначные взять не удастся
3. Поделим 1861 на 3 ≈ 620 (трехзначных чисел)
4. 620 + 99 = 719 (трехзначных и двухзначных)
⇒ возьмем числа от 100 до 719, т.к. они занимают 1860 мест ; 1860 + 160 = 2020 мест
⇒ 2021 место − это число 720,
то есть его первая цифра
2021 место − цифра 7.

Ответ: 7.

№2

Найти все значения a, при которых каждом из них уравнение ровно нулю, при любом значении b имеет хотя бы одно решение.

$$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

1. Возьмем любое значение b (допустимо), при котором уравнение может упроститься

Например, $b = -1$. Подставим

$$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$$

т.к. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 1$

2. Проверим это значение подставив в исходное

$$|x| - \arcsin + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

$$|x| + b|x| - \arcsin x + b\arccos x - b - 1 + \frac{\pi}{2} = 0$$

3. Заметим, что данное уравнение имеет корень $x = 1$ при любом значении b, а проверка.

$$1 + b - \arcsin \cancel{x} + b\arccos \cancel{x} - b - 1 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2} - 1$$

Никакие другие значения a не могут допускаться. Заметим, что при $x = 1$ уравнение превращается в тождество для любого значения b.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Лист 3

№3 Сколько корней имеет уравнение

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg_2 x^2-2$$

Решение:

1. Преобразуем по формуле $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$!

$$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$$

2. Введем новые переменные:

Пусть $(x^2-3)=a$; $(\lg 2)=b$,

тогда

$$a^b = (a+1)b \quad ; \text{ при } b<1$$

3. $(a^b)' = b a^{(b-1)} = \frac{b}{a^{1-b}} \Rightarrow 0.$

$\Rightarrow$ графиком функции (a^b) - является ~~[illegible]~~ выпуклость вверх и выпуклой; а производная монотонно уменьшается.

4. $f(a)=a^b$; $g(a)=b(a+1)$

$f(0)=0$; $g(0)=b \Rightarrow f(0)<g(0)$

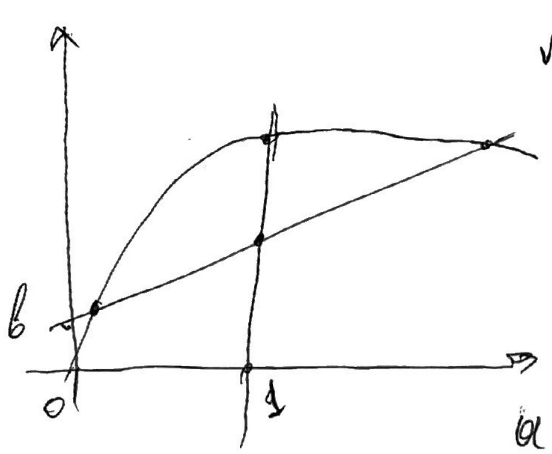
$f(1)=1$; $g(1)=2b \Rightarrow f(1)>g(1)$;

5. Т.к. как

$$1 > 2\lg 2$$

$$\frac{1}{2} > \lg 2$$

$\sqrt{10} > 2$; $10 > 4$ - верно



Ответ: 4 корня

N 4

Решите систему:

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Введем параметр: новую переменную $a=\frac{1}{xyz}$; тогда получим линейную систему уравнений.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+az=6 \\ 3z-6x+ay=2 \\ 6y-2z+ax=3 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ a \\ 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{cases} (a-9)y+(3a+3)z=20 \\ (3a-12)z+(36+a^2)y=2a+18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (a-9)y+(3a+3)z=20 \\ (3a-12)z+(36+a^2)y=2a+18 \end{matrix} \begin{vmatrix} 3(a-4) \\ (a+1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^2+36 \\ a-9 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [(a-9)(a-4)-(36+a^2)(a+1)] \\ [3(a+1)(a^2+36)-3(a-4)(a-9)]; \end{cases}$$ по $y=20(a-4)-2(a+9)(a+1)$ и $z=20(a^2+36)-2(a+9)(a-9)$

$$\Rightarrow \begin{cases} [a^2-13a+\cancel{36}-a^2-a^3-36a-\cancel{36}] \\ 3[a^3+a^2+36a+36-a^2+13a-36]; \end{cases}$$ $y=20a-80-2a^2-20a-18$; $z=20a^2+720-2a^2+162$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a^3+49a)y=2a^2+98 \\ 3(a^3+49a)z=18a^2+882 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay=2 \\ az=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{a} \\ z=\frac{6}{a} \end{cases}$$

Подставим полученные значения в первое уравнение

$2x-3y+az=6 \Rightarrow 2x-\frac{6}{a}+6=6 \Rightarrow 2x-\frac{6}{a}+6-6=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{a}$; Вернемся к первоначальным переменным

$a=\frac{1}{xyz} \Rightarrow a=1:\left(\frac{3}{a}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{6}{a}\right) \Rightarrow a=\frac{a^3}{36} \Rightarrow a^2=36$

$\Rightarrow a=\pm 6$

I случай $a=6$: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=1$

II случай: $a=-6$: $x=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{3}$; $z=-1$

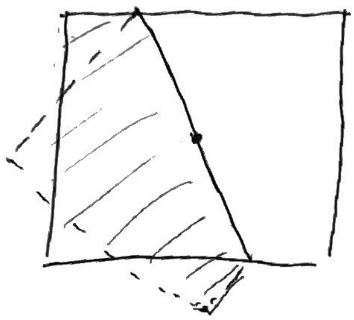
Ответ: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=1$; $x=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{3}$; $z=-1$

№5

Лист 5

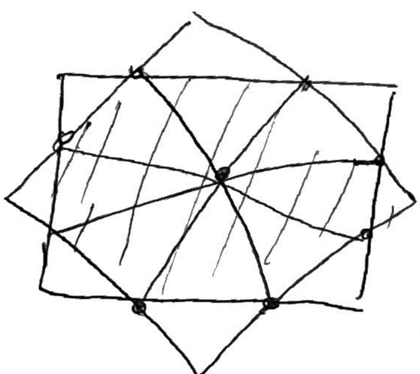
Найти максимально возможную площадь получившейся бумажной фигуры:

Посмотрим на рисунок



Решение:

1. Достроим половины квадратов до целого квадрата.
Тогда задача сводится к задачам ~~[illegible]~~ о минимизации пересекающихся части двух квадратов с общим центром



2. Разобьем закрашенный семиугольник на треугольники. Они все равны, значит минимизировать площадь одного из них

3. $f(x)=ctg(90°-x)+ctg(45°+x)$

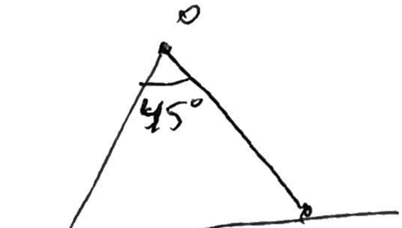
$f(x)' = \frac{1}{\sin^2(90-x)} - \frac{1}{\sin^2(45°+x)}$; $0 \le x \le 22{,}5 \Rightarrow$
$90°-x > 45°+x \Rightarrow$
$\sin^2(90°-x) \geq \sin^2(45°+x)$

$\Rightarrow f(x)' < 0$ при $0 \le x < 22{,}5 \Rightarrow$ $f(x)$ - непрерывная функция при $0 \le x \le 22{,}5$, то

$\Rightarrow f(x)$ - достигает min в точке $x = 22{,}5 \Rightarrow$ квадраты повернуты, то

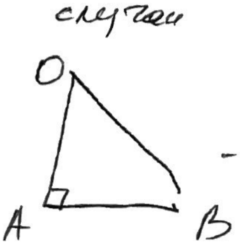
$\Rightarrow$ угол в $45°$

4.

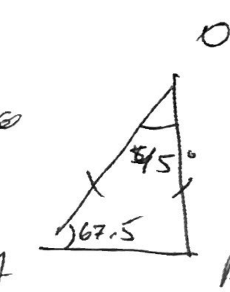


Надо, чтобы S_{AOB} - min, при том, что $\angle OAB \le 90°$; $\angle OAB \geq 67{,}5°$

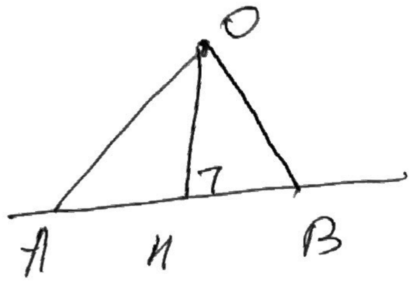
Т.к. имеет смысл ~~рас~~ только рассматривать случаи от:



- когда квадраты совпадают



№5 (продолжение) Лист С



5. Проведем ОН - высоту

$OH = \frac{\sqrt{17}}{2}$, тогда $AH = ctg(67{,}5 + \alpha) \cdot OH$

$BH = ctg(67{,}5 + \alpha) \cdot OH$

$AB = OH \cdot (ctg(67{,}5 + 1) + ctg(67{,}5 - \alpha))$

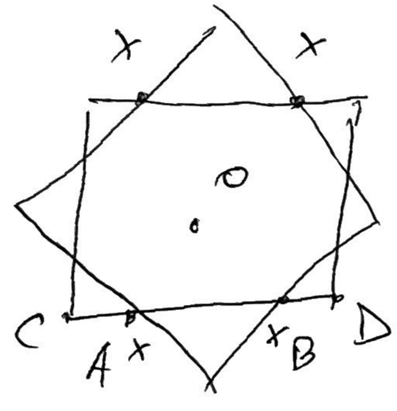
$S_{AOB} = OH^2 \cdot (ctg(67{,}5 + \alpha) + (ctg(67{,}5 - \alpha))$

=> значит, нужно чтобы

$ctg(67{,}5 + \alpha) + ctg(67{,}5 - \alpha)$ - было min.

$67{,}5 + \alpha$ - пусть будет равно $90° - x$, тогда

$67{,}5 - \alpha = 45° + x$, при этом $0 < x \leq 22{,}5$



6. Пусть $CA = x$, тогда $BD = x$

$AD = \sqrt{17} - 2x$

$(\sqrt{17} - 2x)^2 = 2x^2$ из т. Пифагора.

$17 - \cancel{4}\sqrt{17}x + 4x^2 = 2x^2$

$2x^2 - 4\sqrt{17}x + 17 = 0$

$D = 16 \cdot 17 - 8 \cdot 17 = 8 \cdot 17$

$x = \frac{4\sqrt{17} \pm \sqrt{8 \cdot 17}}{4} = \sqrt{17} \pm \sqrt{\frac{17}{2}}$, то $x < \sqrt{17}$

$\Rightarrow x = \sqrt{17} - \sqrt{\frac{17}{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17} - 2(\sqrt{17} - \sqrt{\frac{17}{2}}) \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}}{2}\right) 8 = (\sqrt{2} + \sqrt{17} - \sqrt{17}) \cdot \sqrt{17}) \cdot 2 =$

$= ((\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{17} \cdot 2 = 34(\sqrt{2} - 1)$

7. Тогда для данной фигуры вся фигура это:

$34 - 34(\sqrt{2} - 1) = \cancel{34\sqrt{2}}\ 34(2 - \sqrt{2})$

8. Т.к. в исходных данных был не два квадрата, а один и всё в два раза меньше => $\frac{34(2 - \sqrt{2})}{2} = 17(2 - \sqrt{2})$

Ответ: $17(2 - \sqrt{2})$