МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Романов Михаил Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Романов Михаил Александрович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	15 баллов	15 баллов	20 баллов	15 баллов	85 баллов

Чистовик 6

но максимальная S треугольника с заданным периметром будет у равнобедренного треугольника

Если в прямой угол ABC вписать окружность радиуса $\frac{P}{2}$, то эта окружность будет вневписанной для всех прямоуг. треугольников с периметром P и катетами BX и BY, расположенными на сторонах угла. Т.к. периметр задан, то наибольшая площадь будет у треугольника с наибольшим радиусом вписанной окружности. А этот радиус будет максимальным, когда вписанная окружность касается вневписанной (если радиус будет больше, то эти две окружности пересекутся, что невозможно), то есть когда треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle QPA = 45^\circ$, $\angle RPD = \angle QPR = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} =$ $= 67{,}5^\circ$. Тогда $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$, откуда $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} =$ $= \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, и площадь ΔQPA равна →

1

Черновик №9

20212023 . . . . .

. . . 99

$80 \cdot 2 = 160$

100 - 999 - 2700.

$2700 > 2021 - 160 = 1861$

$1861 : 3 \approx 620$

$619 \to 719$

$620 \to 720$

Чистовик 7

$\to \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(4+2-4\sqrt{2})}{8} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$

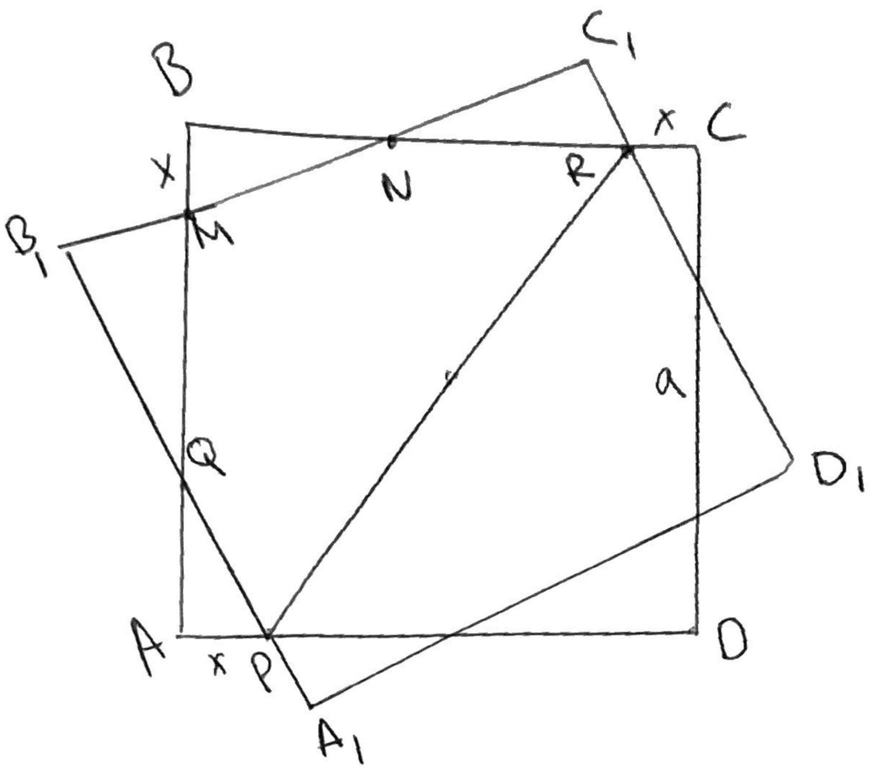
Значит искомая площадь есть $\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} =$

$= \frac{a^2(1+3-2\sqrt{2})}{2} = a^2(2-\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-\sqrt{2})$.

Чистовик 5

5.



Обозначим сторону квадрата через a. Пусть прямая отсекает от стороны квадрата AD отрезок $AP =$
$= x < \frac{a}{2}$.

Тогда $x = AP = PA_1 = C_1R = RC = BM = MD_1$.

Поэтому прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R, QD_1M равны.

Таким образом, площадь получившейся фигуры равна сумме площадей треугольников AQP и MBN.
Площадь трапеции равна $\frac{a^2}{2}$, значит, нам нужно найти максимальную площадь прямоугольного треугольника AQP, периметр которого равен $AP + AQ + QP = BM + AQ + QM =$
$= AB = a$

Чистовик 4

1. Число 20212223....

Числа с 20 по 99 занимают первые $80 \cdot 2 = 160$ мест.
(80 - это кол-во двух значных чисел от 20 до 99)
Все трехзначные числа взять не удастся;
$900 \cdot 3 = 2700 > 2021 - 160 = 1861$.
Разделим $1861 : 3 \Rightarrow 1860 = 620 \cdot 3$, то есть
возьмем трехзначные числа от 100 до 719 ($719 = 620 + 99$)
Таким образом, будут заняты $1860 + 160 = 2020$ мест
Значит на 2021 месте будет стоять первая
цифра 720 Ответ: 7.

Чистовик 3

3. $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ $x^2-3=u$

$\lg 2 = \alpha$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-3+1)\lg 2$

$u^\alpha = (u-1)\alpha$, $\alpha < 1$.

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{u^{1-\alpha}} \to 0$

$u \to \infty$, это значит, что

график функции u' выпуклый вверх и производная уменьшается монотонно

$f(u) = u^\alpha$

$g(u) = (u-1)\alpha$

$f(0)=0$ $g(0)=\alpha$ $f(0)<g(0)$

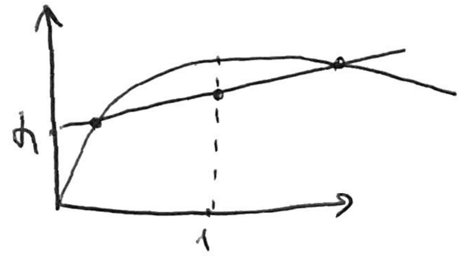
$f(1)=1$ $g(1)=2\alpha$ $f(\alpha)>g(\alpha)$, т.к. $1>2\lg 2$ $|\Rightarrow$

$\frac{1}{2}>\lg 2$ $|10^u$

$10^{\frac{1}{2}}>10^{\lg 2}$

$\sqrt{10}>2$ $|^2$

$10>4$ - верно.



Две точки пересекаются и дают по два корня

Ответ: 4.

Черновик 2

$$(c-9)y+(3c+3)z=20 \quad \Big| (c-4) \ominus \quad \Big| c^2+36 \ominus$$
$$(36+c^2)y+(3c-12)z=2c+18 \quad \Big| (c+1) \quad \Big| c-9$$

$$\begin{cases}[(c-9)(c-4)-(36+c^2)(c+1)]\,y=20(c-4)-2(c+9)(c+1)\\ [3(c+1)(c^2+36)-3(c-4)(c-9)]\,z=20(c^2+36)-2(c+9)(c-9)\end{cases}$$

$$\begin{cases}[\cancel{c^2}-13c+\cancel{36}-\cancel{c^2}-c^3-36c-\cancel{36}]\,y=\cancel{20c}-80-2c^2-\cancel{20c}-18\\ 3[c^3+c^2+36c+36-c^2+13c-36]\,z=20c^2+720-2c^2+162\end{cases}$$

$$\begin{cases}(c^3+49c)y=2c^2+98\\ 3(c^3+49c)z=18c^2+882\end{cases}$$

$$882 \,|\, 18 \qquad 72 \qquad 162 \qquad 49$$

$$\begin{cases}cy=2\\ cz=6\end{cases} \Rightarrow \quad y=\frac{2}{c} \quad z=\frac{6}{c}$$

Подставим в первое уравнение

$$2x-3y+cz=6$$

$$2x-\frac{6}{c}+\cancel{6}=\cancel{6}$$

$$\boxed{x=\frac{3}{c}}$$

Вернемся к обозначению

$$c=\frac{1}{xyz}$$
$$\Downarrow$$
$$c=1:\left(\frac{3}{c}\cdot\frac{2}{c}\cdot\frac{6}{c}\right)$$
$$c=1:\frac{36}{c^3}$$
$$c=\frac{c^3}{36}$$
$$c^2=36$$
$$c=6 \text{ или } c=-6$$

$\Leftarrow$

1) $c=6$, $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=1$

2) $c=-6$, $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-1$

3. $\cancel{2^{\lg(x^3-3)}=\lg 2^{x^3-2} \;\Big|:\lg 2}$

$$\cancel{\frac{2^{\lg(x^3-3)}}{\lg 2}=\lg 2^{(x^3-2)-1}} \qquad \cancel{\lg 2<1}$$

Чистовик 1 Вариант 2.

2. $|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Найдите все a, при каждом из которых уравнение при любом b имеет хотя бы одно решение

Выберем какое-нибудь значение b так, чтобы уравнение упростилось: $b=-1$ (здесь учтено, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\Pi}{3}$)

то есть, при $b=-1$ уравнение будет иметь решение одном значении $a = \frac{\Pi}{2} - 1$. Это значит, что никакие другие значения a не могут оказаться в ответе. Остается проверить, будет ли уравнение иметь решение для любого b, если $a = \frac{\Pi}{2} - 1$.

$$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\Pi}{2} - 1 = 0$$

Заметим, что при $x=1$ уравнение превращается в тождество для любого значения b. Ответ: →

$a = \frac{\Pi}{2} - 1$

---

1. $\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$

Введем параметр $c = \frac{1}{xyz}$

$$\begin{cases} 2x - 3y + cz = 6 \\ 3z - 6x + cy = 2 \\ 6y - 2z + cx = 3 \end{cases} \left|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} (c-9)y + (3c+3)z = 20 \\ (3c-12)z + (36+c^2)y = 2c+18 \end{cases}$$

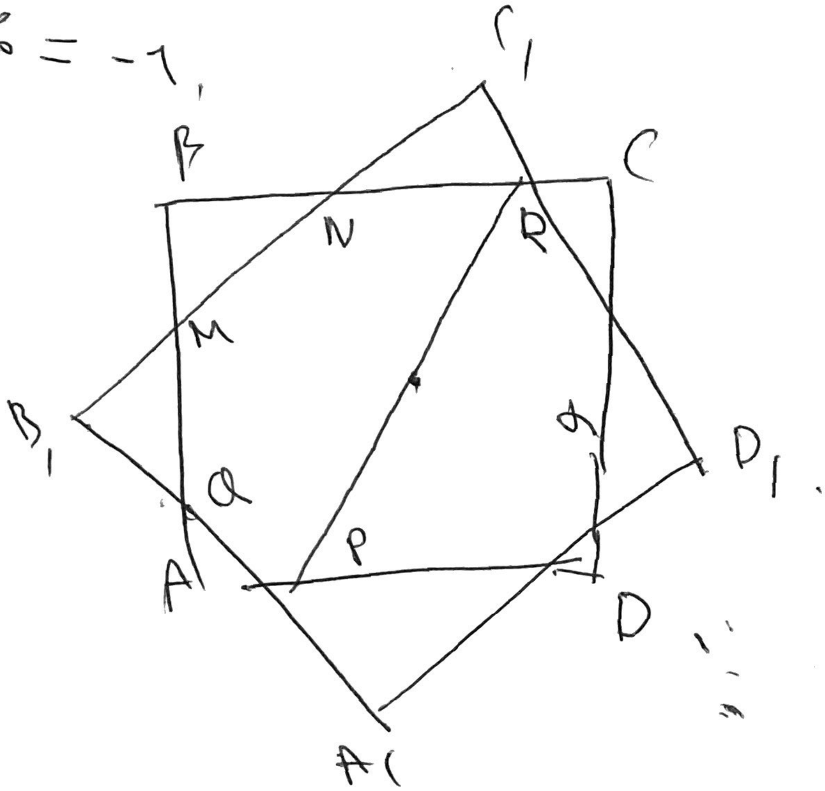
Черновик 11

1) $c = 6$
$x = \frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{3}$
$z = 1$

2) $c = -6$
$x = -\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{3}$
$z = -1$

2. $b = -1$

5.



$x = AP = PA_1 = CR = RC = BM = MD_1$

$AQP, MBN, NC_1R, QD_1M =$

$\angle QPA = 45^\circ$ $\angle RPD = \angle QPR = \frac{180 - 45}{2} = 67{,}5$

$a = AB = 2x + x\sqrt{2} \iff x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$

$S\Delta QPA = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(4+2-4\sqrt{2})}{8} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$

$\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2(1+3-2\sqrt{2})}{2} = a^2(2-\sqrt{2}) = (2(2-\sqrt{2}))$

Черновик. 10

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{xyz} = c$.

$$\begin{cases} 2x - 3y + cz = 6 \\ 3z - 6x + cy = 2 \\ 6y - 2z + cx = 3 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{matrix} \right. \overset{+}{\underset{c}{\Rightarrow}} \begin{cases} (c-9)y + (3c+3)z = 20 \\ (3c-12)z + (36+c^2)y = 2c+18 \end{cases}$$

$(c-9)y + (3c+3)z = 20$. $\quad \left| \begin{matrix} (c-4) \ominus \\ (c+1) \end{matrix} \right| \begin{matrix} c^2+36 \\ c-9 \ominus \end{matrix}$.

$(36+c^2)y + (3c-12)z = 2c+18$

$$\begin{cases} [(c-9)(c-4) - (36+c^2)(c+1)]y = 20(c-4) - 2(c+9)(c+1) \\ [3(c+1)(c^2+36) - 3(c-4)(c+9)]z = 20(c^2+36) - 2(c+9)(c-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\cancel{c^2} - 13c + \cancel{36} - \cancel{c^2} - c^3 - 36c - \cancel{36}]y = 2\cancel{0}c - 80 - 2c^2 - \cancel{20c} - 18 \\ 3[c^3 + c^2 + 36c + 36 - c^2 + 13c - 36]z = 20c^2 + 720 - 2c^2 + 162. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c^3 + 49c)y = 2c^2 + 98 \\ 3(c^3 + 49c)z = 18c^2 + 882. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 882 & 18 \\ 72 & 49 \\ \hline 162 & \end{array}$$

$$\begin{cases} cy = 2 \\ cz = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = \frac{2}{c} \\ z = \frac{6}{c} \end{matrix}$$

$2x - 3y + cz = 6$

$2x - \frac{6}{c} + \cancel{6} = \cancel{6}$.

$x = \frac{3}{c}$.

$c = \frac{1}{xyz} \quad c = 1 : \left(\frac{3}{c} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{6}{c}\right)$.

$c = 1 : \frac{36}{c^3}$

$c = \frac{c^3}{36}$

$c^2 = 36 \quad c = -6$ или $c = 6$

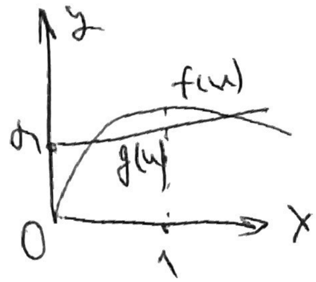
Черновик 8

3. $2^{\lg(x^3-3)} = \lg 2^{x^2-2}$. $x^3-3=u$, $\lg 2=\alpha$.

$(x^3-3)^{\lg 2} = (x^3-2)^{\lg 2}$

$(x^3-3)^{\lg 2} = (x^3-3+1)^{\lg 2}$

$u^{\alpha} = (u-1)\alpha$ $\alpha<1$



$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{u^{1-\alpha}} \to 0$

$u\to\infty$, это значит, что график функции u^{α} выпуклый вверх и круто (?) монотонно ~~возр~~. увеличивается.

$f(u)=u^{\alpha}$

$g(u)=(u-1)\alpha$ $f(0)<g(0)$

$f(0)=0$ $g(0)=\alpha$. $f(\alpha)>g(\alpha)$, т.к. $1>2\lg 2 \;|:2$

$f(1)=1$ $g(1)=2\alpha$. $\frac{1}{2}>\lg 2 \;|10^{u}$

$10^{\frac{1}{2}} > 10^{\lg 2}$

$\sqrt{10}>2 \;|^{2}$

$10>4$ — верно

Две точки пересекаются, и далее по 2 корня

Ответ: 4.