МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Иванова Ульяна Игоревна**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Иванова Ульяна Игоревна

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	0 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	80 баллов

ВАРИАНТ 2 ЛИСТ 1

№ 1

Цифры чисел с 20 по 99 занимают в этом ряду первые $80 \cdot 2 = 160$ мест. Осталось $2021 - 160 = 1861$ места. Цифры чисел от 100 до 719 занимают следующие $(719 - 99) \cdot 3 = 1860$ мест. Значит, на 2021 месте стоит первая цифра числа 720, то есть 7.

Ответ: 7.

№ 3

Уравнение преобразуется к виду:

$$t^{\alpha} = \alpha(t+1), \ \alpha = \lg 2 \in (0,1), \ t = x^2 - 3 > 0,$$

причём:

1) график левой части выпуклая вверх ~~прямая~~ кривая (типа корень из t), начинающаяся в точке $(0;0)$;

2) график правой части — полого растущий положительный луч, начинающийся в точке $(0;\alpha)$, расположенный выше точки $(0;0)$;

3) при $t=1$ значение левой части, наоборот, больше значения правой, т.к.:

$$1^{\alpha} = \lg 10 > \lg 4 = \alpha \cdot (1+1)$$

4) поэтому графики пересекаются в двух точках (одна между 0 и 1, другая правее 1), каждая из которых порождает по два корня исходного уравнения.

Ответ: 4

№4 **ЛИСТ 2.**

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Решим задачу в общем виде, найдём при заданных a, b, c решения системы

$$\begin{cases} ax-by+\frac{1}{xy}=c \\ bz-cx+\frac{1}{xz}=a \\ cy-az+\frac{1}{yz}=b \end{cases}$$

Ясно, что $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$. Рассмотрим эту систему как линейную относительно a, b, c

$$\begin{cases} ax-by-c=-\frac{1}{xy} \\ -a+bz-cx=-\frac{1}{xz} \\ -az-b+cy=-\frac{1}{yz} \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на x и прибавим к первому, а также второе уравнение умножим на z и вычтем из третьего. Получим новую равносильную систему:

$$\begin{cases} -a+bz-cx=-\frac{1}{xz} \\ b(xz-y)-c(x^2+1)=-\frac{xy+z}{xyz} \\ -b(1+z^2)+c(y+xz)=\frac{yz-x}{xyz} \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнение b_x и подставив его во второе уравнение, получим $c=\frac{1}{xy}$. После этого находятся $b=\frac{1}{yz}$, $a=\frac{1}{xz}$. Тогда $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2=\frac{1}{abc}$ (заметим, что решение существует, если только $abc > 0$).

$\boxed{\text{ЛИСТ 3}}$

Значит, $xyz = \pm \frac{1}{\sqrt{abc}}$, и получаем две тройки решений:

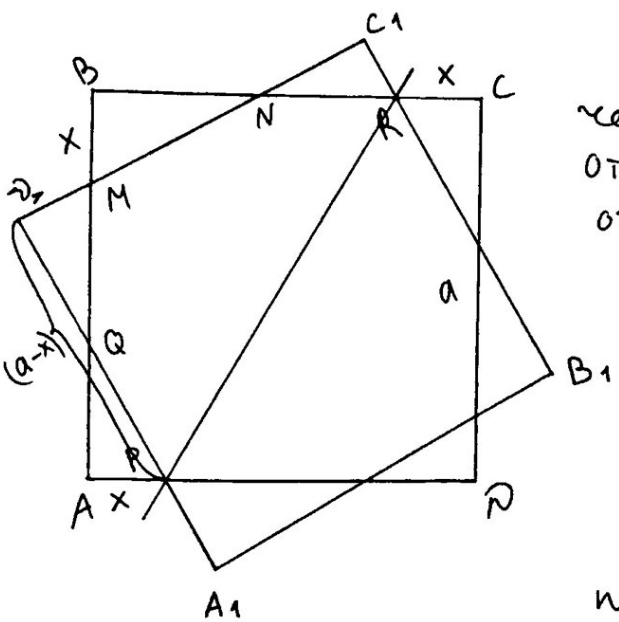
$$x = \frac{b}{\sqrt{abc}},\ y = \frac{a}{\sqrt{abc}},\ z = \frac{c}{\sqrt{abc}} \quad \text{и} \quad x = -\frac{b}{\sqrt{abc}},\ y = -\frac{a}{\sqrt{abc}},$$
$$z = -\frac{c}{\sqrt{abc}}$$

При $a=2$, $b=3$, $c=6$ эти два решения:

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3},\ z = 1 \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{3},\ z = -1.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3},\ z = 1$ и $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{3},\ z = -1$.

№5



Обозначим сторону квадрата через a. Пусть прямая отсекает от стороны ~~отр~~ квадрата AD отрезок $AP = x < \frac{a}{2}$.

Тогда $x = AP = PA_1 = C_1R = RC = BM = MD_1$. Поэтому прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R, MD_1Q равны. Таким образом, площадь получившейся фигуры равна сумме площадей прямоугольной трапеции PD_1C_1R и двух равных прямоугольных треугольников AQP и MBN. ~~MBA~~. Площадь трапеции равна $\frac{a^2}{2}$. Значит, нам нужно найти максимальную площадь прямоугольного треугольника AQP, периметр которого равен: $AQ + QP + AP = BM + AQ + QM = AB = a$. Но максимальная площадь прямоугольного треугольника с заданным периметром будет у равнобедренного треугольника.

Действительно, если в прямой угол ABC вписать окружность радиуса $\frac{P}{2}$, то эта окружность будет вневписанной для всех прямоугольных треугольников с периметром P и катетами BX и BY, расположенными на сторонах угла. Так как периметр задан, то наибольшая площадь будет у треугольника с наибольшим радиусом вписанной окружности. А этот радиус будет максимальным, когда вписанная окружность касается вневписанной (если радиус будет больше, то эти две окружности пересекутся, что невозможно), то есть когда треугольник равнобедренный.

Поэтому $\angle QPA = 45°$, $\angle RPA = \angle QPR = \frac{180° - 45°}{2} = 67{,}5°$.

Тогда $a = AB = 2x + x\sqrt{2}$, откуда $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, и площадь $\Delta QPA = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(4+2-4\sqrt{2})}{8} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$.

Значит, искомая площадь есть $\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} =$

$= \frac{a^2(1+3-2\sqrt{2})}{2} = a^2(2-\sqrt{2}) = 17(2-\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-\sqrt{2})$.