МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Полежаев Федор Максимович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Полежаев Федор Максимович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	5 баллов	15 баллов	80 баллов

Чистовик   Вариант 2   Лист № 1

Задача № 1

Докажем, что первая цифра числа 720 стоит на 2021 месте.

Действительно, до числа 720 стоят числа:

20, 21, 22 ... 99, 100, 101 ... 719

Всего $(99-20)+1 = 80$ - двузначных чисел
$(719-100)+1 = 620$ - трехзначных чисел

Вместе они занимают:

$80 \cdot 2 + 620 \cdot 3 = 160 + 1860 = 2020$ „мест"

(т.к. двузначное занимает 2 „места", трехзначное – 3 „места")

Следовательно, последняя цифра числа 719 – на 2020 месте $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ первая цифра числа 720 – на 2021 месте.

$\boxed{\text{Ответ: 7.}}$

Чистовик   Лист N2

Задача N2

$$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

1) Т.к. уравнение должно иметь решения при любом b, из этого следует, что оно должно иметь решение при $b = -1$:

$$|x| - \arcsin x - (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$\cancel{|x|} - \arcsin x - \arccos x - \cancel{|x|} + 1 + a = 0$$

Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0$$

$\Rightarrow$ Это уравнение имеет решения только если $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Получаем, что при $b = -1$ нас удовлетворяет только $a = \frac{\pi}{2} - 1$

2) Докажем, что при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ и любом b есть решения (хотя бы одно):

$$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

$x = 1$ – всегда решение:

$$1 - \frac{\pi}{2} + b\underbrace{(0 + 1 - 1)}_{0} + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Таким образом, при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ и любом b – решение есть, а при $a \neq \frac{\pi}{2} - 1$ нет решений при $b = -1$.

$$\boxed{\text{Ответ: } a = \frac{\pi}{2} - 1}$$

Чистовик

Лист №3

Задача №3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg(2^{x^2-2})$$

$$\Updownarrow$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$$

Пусть $x^2-3 = t \geqslant 0$ т.к. возведение в действительную степень определено только для положительных чисел и 0.

$\lg 2 = \alpha$

Получим уравнение:

$t^\alpha = (t+1)\alpha$ – исследуем его на кол-во решений

Пусть $f(t) = t^\alpha - (t+1)\alpha$

1) Заметим, что: 1) $\boxed{\alpha < \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \lg 2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{10} \Leftrightarrow 4 < 10$

2) $\boxed{\alpha > \frac{1}{4}} \Leftrightarrow \lg 2 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 > (10)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 16 > 10$

То есть $\alpha \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$

2) $f(0) = -\alpha < 0$

$f(1) = 1 - 2\alpha > 0$ т.к. $\alpha < \frac{1}{2}$

$f(10) = 10^{\lg 2} - 11\alpha = 2 - 11\alpha < 0$ т.к. $\alpha > \frac{1}{4} > \frac{2}{11}$

Получаем, что $f(t)$ как минимум два раза меняет знак, а т.к. $f(t)$ – непрерывная, то уравнение $f(t) = 0$ имеет как минимум два решения. (на отрезке $[0;1]$ и $[1;10]$)

здесь одно есть

и здесь одно есть

Чистовик

Задача №3
(продолжение)

Лист №4

3) То есть, уравнение $t^{\alpha} - (t+1)\alpha = 0$ (*) имеет не менее 2 решений.

Докажем, что это уравнение имеет не более 2 решений.

Действительно, функция $g(t) = t^{\alpha}$ – выпуклая $\Rightarrow$ $g(t)$ имеет не более двух пересечений с прямой. Т.к. $h(t) = (t+1)\alpha$ – прямая, то уравнение $g(t) = h(t)$ имеет не более двух решений.

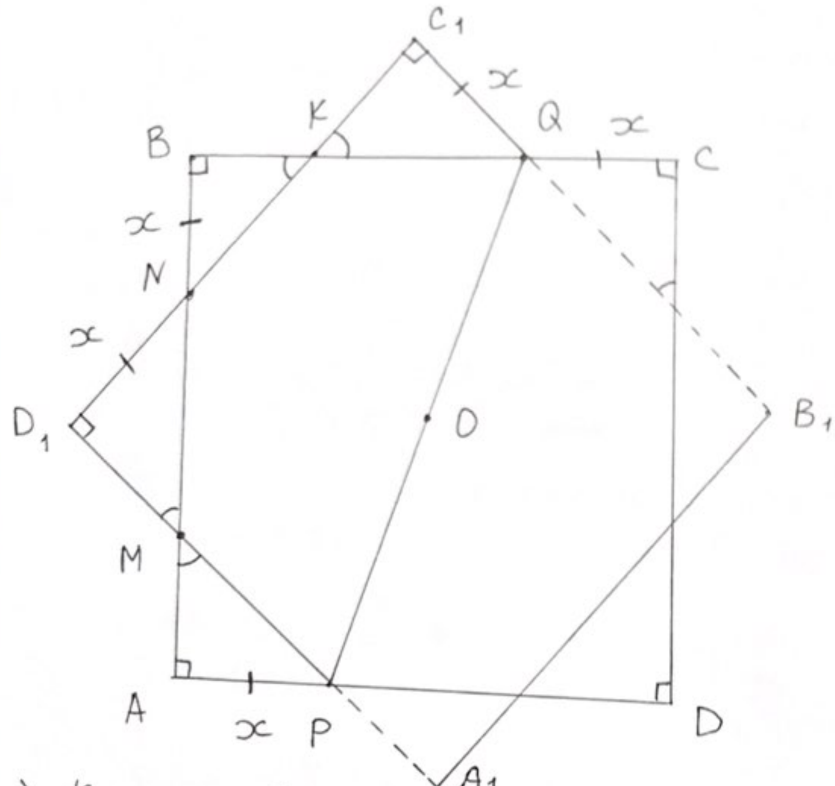
4) Таким образом, мы доказали, что уравнение $(t+1)\alpha = t^{\alpha}$ имеет не менее двух и не более двух решений $\Rightarrow$ оно имеет два решения. Каждому $t = x^2 - 3$ соответствуют ровно два различных икса. Следовательно исходное уравнение ~~будет иметь~~ имеет 4 корня.

$\boxed{\text{Ответ: 4 корня}}$

Чистовик

Лист N5

Задача N5



1) Пусть квадрат ABCD со стороной a согнули по прямой PQ. Трапеция PQCD перешла в трапецию C_1QPD_1 – симметричную относительно прямой PQ. Пусть $CQ = x \Rightarrow C_1Q = x$ из симметрии.

$\triangle COQ \overset{II}{=} \triangle AOP$ ($CO = OA = \frac{1}{2}AC$; $\angle QCO = \angle PAO = 45^\circ$; $\angle OQC = \angle OPA$ как накрест лежащие)

$\Rightarrow AP = QC = x$

2) Достроим C_1QPD до квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Этот квадрат равен исходному (т.к. $C_1D_1 = CD$) и симметричен относит-но PQ.

Чистовик Лист N 6

Задача N5
(продолжение)

Заметим, что при повороте на угол $\angle COC_1$ с центром O: $C \to C_1 \Rightarrow$ квадрат $ABCD$ перейдет в квадрат $A_1D_1C_1B_1$.

Поэтому $B \to D_1 \Rightarrow \angle COC_1 = \angle BOD_1$

3) Рассм. $\triangle COC_1$ и $\triangle BOD_1$:

$\angle COC_1 = \angle BOD_1$ (см. выше)
$CO = BO$ ($\frac{1}{2}$ диагонали)
$C_1O = B_1O$ (—"—"—)
$\overset{I}{\Rightarrow} \triangle COC_1 = \triangle BOD_1$ $(\Rightarrow BD_1 = CC_1)$

Поэтому $\angle D_1BO = \angle C_1CO = \angle CC_1O = \angle BD_1O = \alpha$
пусть
из равнобедренности

Рассм. $\triangle D_1NB$ и $\triangle C_1QC$:

$D_1B = C_1C$

$\angle D_1BN = \angle BD_1N = \angle CC_1Q = \angle C_1CQ = \alpha - 45°$
(т.к. $\angle OBN = \angle OD_1N = \angle OCQ = \angle OC_1Q = 45°$)

$\Rightarrow \triangle D_1NB \overset{II}{=} \triangle C_1QC \Rightarrow D_1N = NB = x$

4) Прямоугольные треугольники $\triangle PAM$, $\triangle MD_1N$, NBK, KC_1Q подобны ($\boxed{\angle AMP = D_1MN}$ (вертикальные)
$\angle D_1MN = 90° - \angle D_1NM = 90° - \angle BNK = \angle BKN = \angle C_1KQ$)
и имеют катет, противолежащий соотв. углу, равный x. $\Rightarrow$ Они равны по катету и острому углу.
(смотри рисунок)

Чистовик Лист N 7

Задача N5
(продолжение)

5) S сложенного квадрата $= S(C_1QPD_1) + S_\Delta BNK + S_\Delta MAP$

$S(C_1QPD_1) = \frac{1}{2} SABCD = \frac{a^2}{2}$ (если прямая проходит через центр прямоугольника, то она делит его на две равновеликие части)

фиксированное

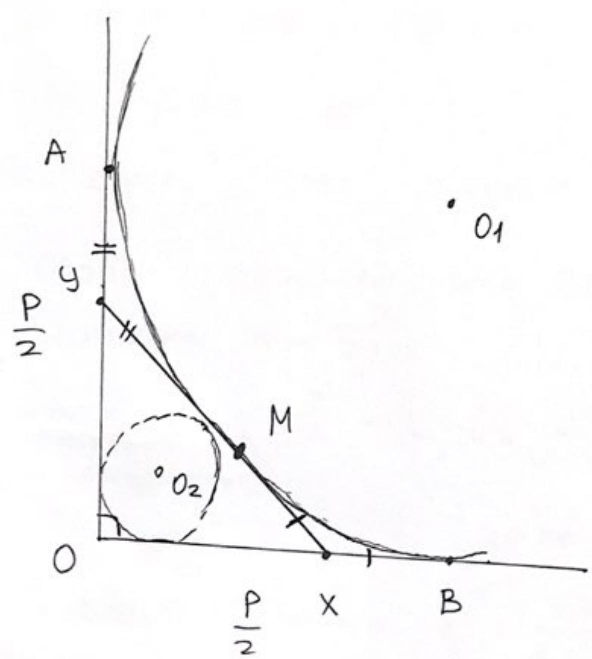
Необходимо максимизировать $S_\Delta BNK + S_\Delta MAP$, чтобы максимизировать площадь слож. части.

$S_\Delta BNK + S_\Delta MAP = 2S_\Delta BNK \to max$

Заметим, что $MN + BN + AM = NK + BN + BK = P$

То есть $P(BNK)$ – фиксирован и равен $MN + BN + AM = a$ – стороне квадрата

6) Задача сходится к нахождению максимальной площади прямоугольного тр-ка с фиксированным периметром:



Впишем в прямой угол окружность так, чтобы $OA = OB = \frac{P}{2}$ ($A; B$ – точки касания)

Будем проводить все возможные касательные к дуге AB и получать все возможные △ с периметром P:

$AY = YM$; $MX = XB$ ($\frac{\text{отр.}}{\text{кас}}$)

$\Rightarrow YM + MX + OX + OY = AY + YO + OX + XB = P$

YO изменяется от $(\frac{P}{2}; 0)$ как и XO.
(не включительно)

Чистовик

Задача № 5
(продолжение)

Таким способом мы будем получать все возможные $\triangle$ с периметром P
(катеты не превосходят $\frac{P}{2}$, т.к. они меньше чем гипотенуза xy)

Так как $S_{\triangle OXY} = \frac{P}{2} \cdot r$, то максимум площади достигается когда вписанная окружность w с радиусом r имеет максимальный радиус.
Так как w тоже вписана в угол и лежит внутри $\triangle OXY$, то максимум достигается, когда эта окружность касается большой окружности. Это происходит в точке $M \Rightarrow O_2, M, O_1$ лежат на одной прямой. $OO_2 \equiv OO_1 \equiv$ с биссектрисой угла O.
$O_2M \perp XY \Rightarrow OM \perp XY \Rightarrow OM$ - бисс. и высота
$\Rightarrow \triangle OXY$ - р/б.

То есть S_{max} достигается в равнобедренном тр-ке.

7) Тогда, получаем, что $BN + NK + BK = x + x + \sqrt{2}x = a$
Откуда $x = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$

$$S_{max\ \text{сложенного квадрата}} = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{(2+\sqrt{2})^2}\right) = \boxed{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{6+2\sqrt{2}}}$$

Ответ: $S_{max} = \frac{\overset{17 \text{ по условию}}{\cancel{a^2}}}{2} + \frac{a^2}{6+2\sqrt{2}} = 17\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6+2\sqrt{2}}\right)$

Чистовик Лист N 9

Задача N 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \quad |:3 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \quad |:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \quad (1) \\ z - 2x + \frac{1}{3xz} = \frac{2}{3} \quad (2) \\ 3y - z + \frac{1}{2yz} = \frac{3}{2} \quad (3) \end{cases}$$

Сложим (1), (2), (3):

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{3xz} + \frac{1}{2yz} = 6 + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \Big| \cdot 6$$

$$\frac{6z + 2y + 3x}{xyz} = 49$$

$$xyz = \frac{6z + 2y + 3x}{49}$$

Откуда

10 Черновик

$2x^2y - 3x^2y^2 - 6xy = 0 - 1$

$3z^2x - 6xz^2 - 2xz = 0 - 1$

$6y^2z - 2yz^2 + 3yz = -1$

$$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6$$

$$3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2$$

$$6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3$$

$$6 - 2x + 3y + 2 - 3z + 6x + 3 - 6y + 2z =$$

$$= 12$$

$$\frac{1}{xy} = a$$

$$\frac{1}{yz} = b \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\sqrt{abc}} = xyz$$

$$\frac{1}{xz} = c \qquad z = \frac{a}{\sqrt{abc}}$$

$$x = \frac{b}{\sqrt{abc}}$$

$$\frac{2b}{\sqrt{abc}} - \frac{3c}{\sqrt{abc}} + a = 6 \,\Big|\, 2 \qquad y = \frac{c}{\sqrt{abc}}$$

$$\frac{3a}{\sqrt{abc}} - \frac{6b}{\sqrt{abc}} + c = 2$$

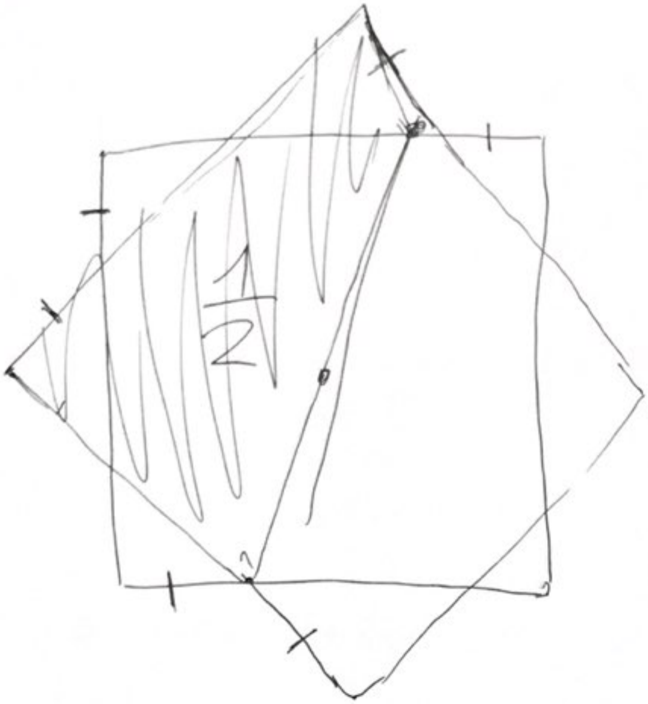
$$\frac{a}{\sqrt{abc}} + 3a + b + c = 23$$

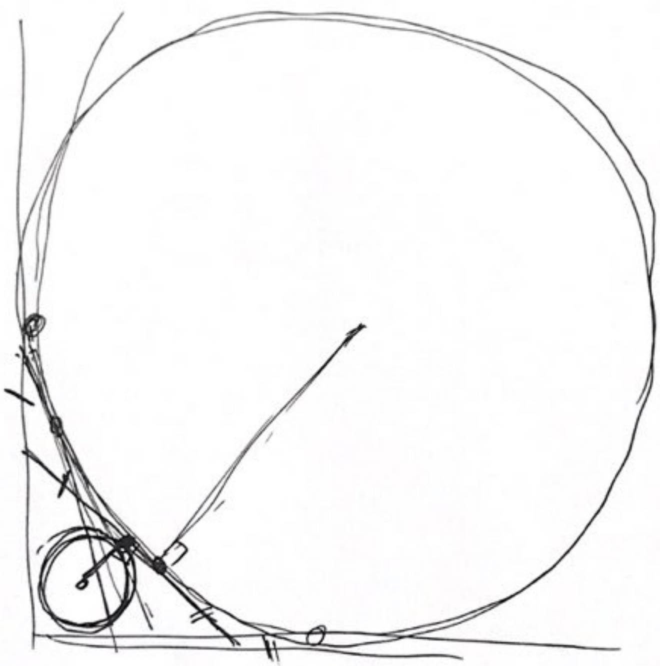
$$\frac{bc}{\sqrt{abc}} - \frac{2a}{3\sqrt{abc}} + b + \frac{b}{3} = 1$$

$$\frac{b}{\sqrt{abc}} - \frac{2a}{3\sqrt{abc}} + 3a + \frac{b}{3} = 21$$

Черновик

11





Черновик

~~[illegible]~~

12

20 21 22 23 ...

$$\begin{cases} 2x - 3y + \dfrac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \dfrac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \dfrac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$\cancel{x^2+y^2+z^2}$

$xyz \neq 0$

$2x^2y - 3y^2x + 1 = 6xy$

$b = -1$

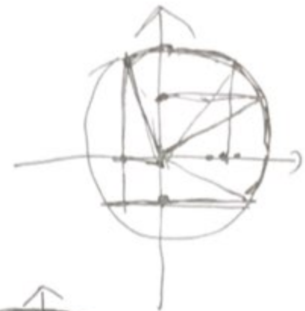
$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$$|x| \underbrace{- \arcsin x - \arccos x}_{-\frac{\pi}{2}} - |x| + 1 + a = 0$$

$$\boxed{a = \frac{\pi}{2} - 1}$$

Черновик 13

Задача №1

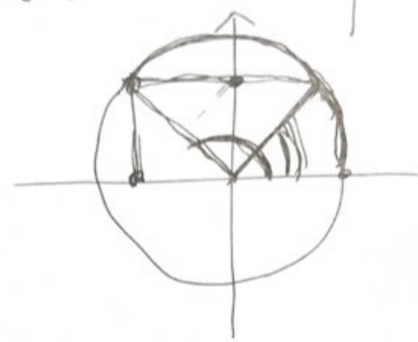


$\underbrace{20}_{12}$, $\underbrace{21}_{3\ 4}$, $\underbrace{22}$ ... $\underbrace{99}$, $\underbrace{100}_{161\ 162\ 163}$

?

99 - 20 = 79

160



1 + 2 (n - 20)

158

n = 99   79 · 2 + 1

161 + 3 (n - 100) = 2021

2021
- 161
1860

1860
+ 300
2160

3n - 300 = 1860

2160 : 3 = 720

$\underbrace{7}20$

$\boxed{160}$

$\boxed{720 \cdot 3}$

720
- 100
$\boxed{620}$

620
· 3
1860
+ 160
$\boxed{2020}$

Черновик (14)

$$\frac{2x^2y-3y^2x+1}{\cancel{xy}} = \frac{3z^2x-6x^2z+1}{\cancel{xy}z} \quad \frac{6y^2z-2z^2y+1}{\cancel{3y}z}$$

$$2x-3y+\frac{1}{xy}=6$$

$$z-2x+\frac{1}{3xz}=\frac{2}{3}$$

$$3y-z+\frac{1}{2xz}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{x\cancel{y}}+\frac{1}{3xz}+\frac{1}{2xz}=6+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$$

$$\frac{\cancel{6xy+2xz}\ 6z+}{xyz}$$

$$6z+2y+3x=49xyz$$

$(49yz\cancel{z}-3)\cancel{x}$

$3y-4x+z$

$=6z+2y+z$

$12z-\cancel{6xyz}\,24x$

$\cancel{18y}-\cancel{3}$

$18y-6z$

$$\frac{x+4z}{x+y+z}$$