МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кириллов Андрей Александрович**

Класс: **8**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

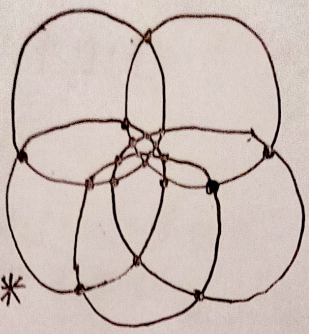
ФИО участника: Кириллов Андрей Александрович

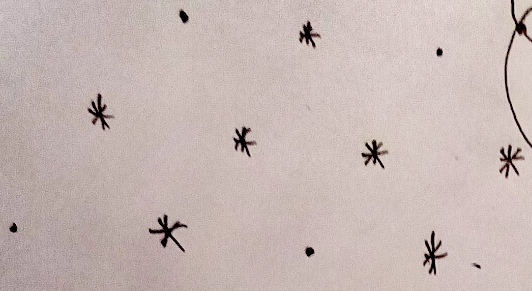
Класс: 8

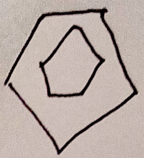
Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	15 баллов	90 баллов

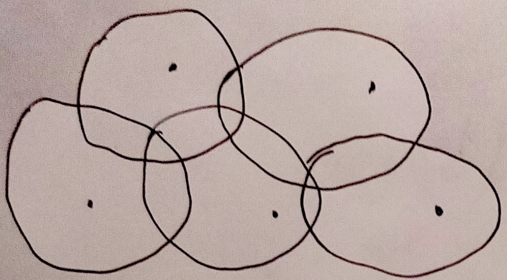
*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

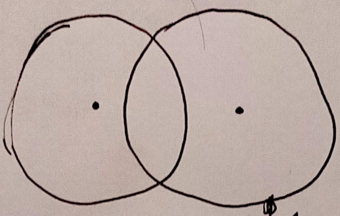
Черновик
№ 6

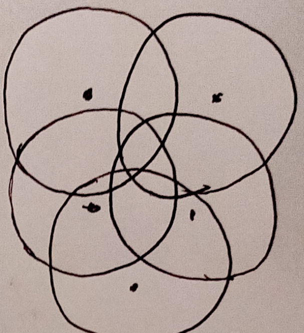






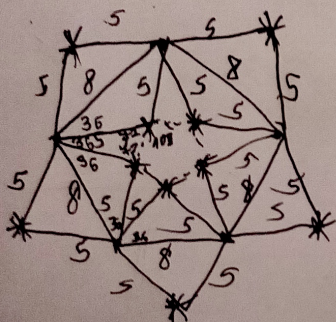


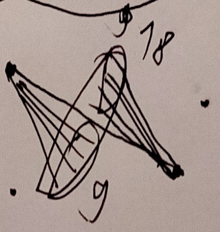


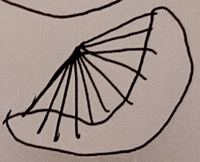


10

$\frac{\overset{96}{\cancel{182}} \cdot 3}{5,1}$

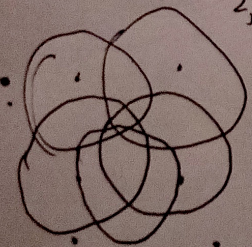


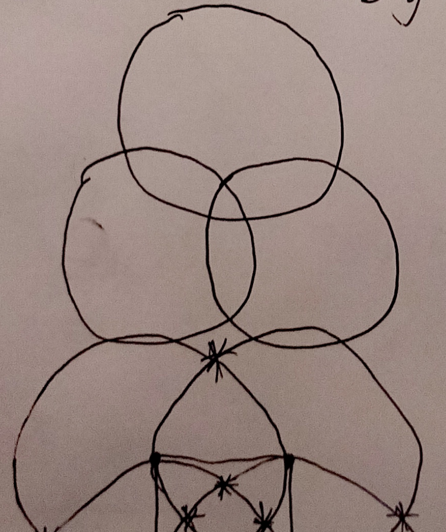


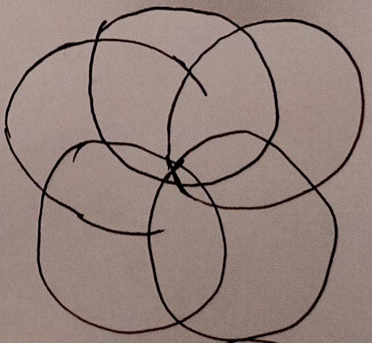


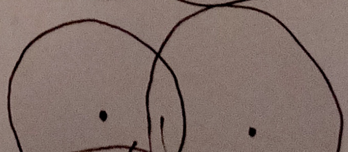
$\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$

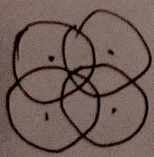
$2,5 \cdot \sqrt{2}$











Чистовик

№3

Пусть M — множество 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, т.е. 6-значных чисел, состоящих из цифр $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (не обязательно разных).

Сопоставим каждому числу $\overline{abcdef} \in M$ число $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)(9-e)(9-f)} \in M$. Действительно:

$1 \leq a \leq 8 \Rightarrow -8 \leq a \leq -1 \Rightarrow 1 \leq 9-a \leq 8$. ~~Также~~ Аналогично с b, c, d, e, f. Также $a \neq 9-a$, иначе $a+(9-a) = 9 = 2a \Rightarrow a = 4{,}5$ ($\not\in \mathbb{Z}$). Аналогично с b, c, d, e, f.

Значит, такое соответствие возможно.

На каждое из 6 мест 6-значного числа можно поставить 1 из 8 цифр $\{1,2,3,4,5,6,7,8\} \Rightarrow |M| = 8^6 = 2^{18}$ (ещё раз убедились в возможности соответствия).

Тогда кол-во пар чисел будет равно $\frac{2^{18}}{2} = 2^{17}$.

По сложению справа видно, что сумма чисел в 1 паре всегда равна

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\ + \ (9-a)(9-b)(9-c)(9-d)(9-e)(9-f) \\ \hline 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \end{array}$$

$999999 = 9 \cdot 111 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \underline{37}$, т.е. $\vdots\, 37$.

Но всего пар $2^{17} \Rightarrow \sum M = 2^{17} \cdot 999999 = 2^{17} \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \underline{37}$, т.е. $\vdots\, 37$

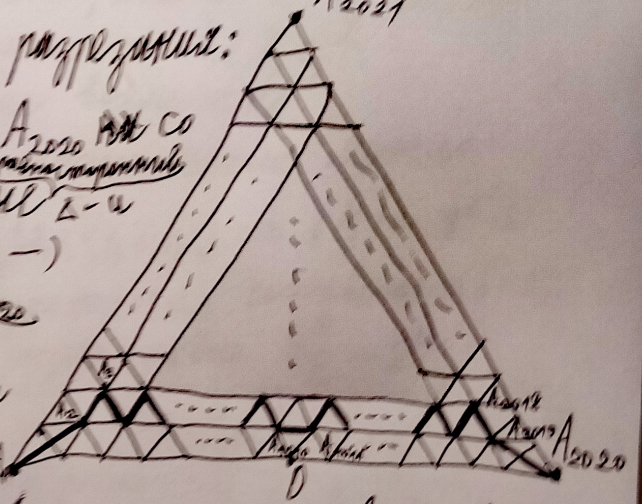
Итак, поскольку $\sum M$ — сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, то

сумма 6-значных чисел, не содержащих цифр 0 и 9 в десятичной записи, будет кратна 37, чтд

Чистовик

№7

Построим внутри правильного Δ-а $A_1A_{2021}A_{2020}$ ломаную $A_1A_2A_3\ldots A_{2018}A_{2019}A_{2020}$ любым образом так, чтобы $\{A_2, A_3, \ldots, A_{2019}\}$ лежали внутри Δ-а, и никакие 2 отрезка A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} ($1 \le i \le 2019$ и $1 \le j \le 2019$) не имели общих точек. Тогда образуются 2020-угольник $A_1A_2\ldots A_{2019}A_{2020}$ (снизу) и 2021-угольник $A_1A_2\ldots A_{2019}A_{2020}A_{2021}$ (сверху).



Можно привести пример разрезания:

1) „мысленно" „делим" $\Delta A_1A_{2021}A_{2020}$ со стороной 1 на равные правильные Δ-и со сторонами $\frac{1}{1012}$ (см. рис.: —)

2) сначала соединяем A_1 и A_{2020} с противоположными вершинами в ромбах (см. рис. справа), а потом ~~сразу~~ разрезаем по сторонам Δ-в малых Δ-в (см. рис.: —)

3) у многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2020}$:

1) основание нижнее — плоское
2) 2 „впадины" слева и справа
3) 504 острых „зубца" с левой стороны, и столько-же с правой.

4) у многоугольника $A_1\ldots A_{2021}$:

1) $\frac{[illegible]}{2}$ тупых „зубца" слева и справа
2) острый угол сверху
3) 503 острых „зубца" с левой стороны и столько-же с правой

5) обе фигуры симметричны относительно $A_{2021}D$.

$\boxed{\text{Ответ: да, можно (пример выше)}}$

Чистовик

№ 1

Докажем, что $N \vdots 2027$:

1) $$\left.\begin{array}{l} 7 \equiv 7 \pmod{2027} \\ 9 \equiv 9 \pmod{2027} \\ 13 \equiv 13 \pmod{2027} \end{array}\right\} \Rightarrow 7\cdot 9\cdot 13 \equiv 7\cdot 9\cdot 13 \pmod{2027}$$

2) $$\left.\begin{array}{l} 2020 \equiv -7 \pmod{2027}, \text{ т.к. } 2020-(-7) = 2027 \vdots 2027 \\ 2018 \equiv -9 \pmod{2027}, \text{ т.к. } 2018-(-9) = 2027 \vdots 2027 \\ 2014 \equiv -13 \pmod{2027}, \text{ т.к. } 2014-(-13) = 2027 \vdots 2027 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2020\cdot 2018\cdot 2014 \equiv (-7)\cdot(-9)\cdot(-13) \pmod{2027} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2020\cdot 2018\cdot 2014 \equiv -(7\cdot 9\cdot 13) \pmod{2027}$$

3) $$\left.\begin{array}{l} 7\cdot 9\cdot 13 \equiv 7\cdot 9\cdot 13 \pmod{2027} \\ 2020\cdot 2018\cdot 2014 \equiv -(7\cdot 9\cdot 13) \pmod{2027} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot 9\cdot 13 + 2020\cdot 2018\cdot 2014 \equiv 7\cdot 9\cdot 13 - 7\cdot 9\cdot 13 \pmod{2027} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N \equiv 0 \pmod{2027} \Rightarrow N \vdots 2027,$$ чтд

Отметим, что $2020\cdot 2018\cdot 2014 > 2000^3 \Rightarrow$ (т.к. $N > 2020\cdot 2018\cdot 2014$, ведь $7\cdot 9\cdot 13 > 0$) $N > 2000^3 \Leftrightarrow 2027n > 2000^3$ ($n = \frac{N}{2027}$ и $n \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow n > \frac{2000^3}{2027} = \frac{4000000\cdot 2000}{2027} > \frac{2027\cdot 2000}{2027} = 2000$; т.е. $n > 2000 \Rightarrow N$ — произведение ~~из~~ 2 чисел, больших 2000 $\Rightarrow$ либо оба числа простые, либо оба составные, либо 1 простое и 1 составное. В любом случае, в разложении N на простые множители, участвует х.б. 2 простых числа $\Rightarrow N$ — составное.

Ответ: число N является составным числом.

Чистовик

№ 6

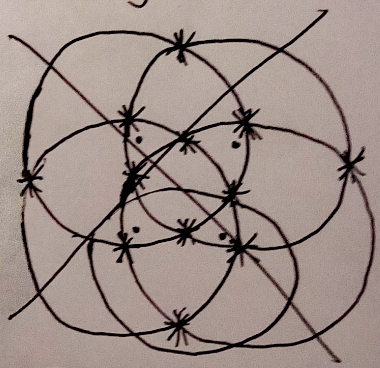
Оценка: отметим на плоскости 5 разных точек (мальчиков) и ~~провед~~ начертим из каждой точки окружность радиусом 5м. Максимальное кол-во точек пересечения окружностей достигается только тогда, когда любые 2 окружности пересекаются в 2 ~~тх~~ уникальных точках $\Rightarrow max. = 2 \cdot C_5^2 =$

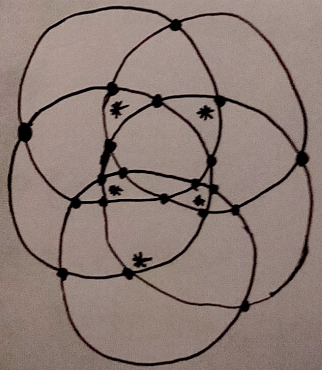
$= \cancel{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{\cancel{2}} = 20$ девочек

Пример: см. справа-ниже

~~* - девочка~~ * - мальчик

• - девочка





Черновик

$\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023}\ ?\ \frac{5}{16}$ №9

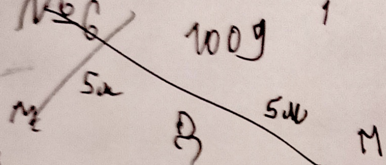
$2020 \mid 11$, 92, 40, 183, 283, 183

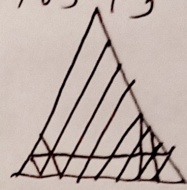
$\frac{101}{102}\cdot\ldots\cdot\frac{1021}{1022}\cdot\frac{1023}{1024}$ $-3\cdot2$ 117 $-(-4)\cdot(-4)=$

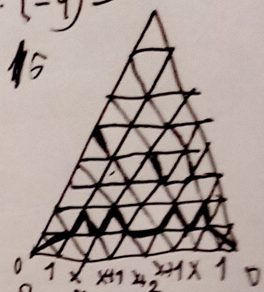
$\frac{100}{1024} = \frac{25}{256}$ №3 $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$ 15

123456
876543
999999

2018 №6 1009

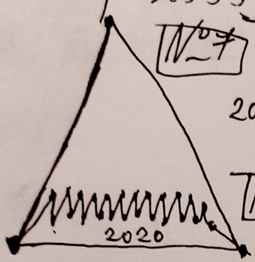






3 2 −4 −8 8
1 x+3 1

$2^2\cdot5$ 42
$3\cdot7\cdot2$ −2



2018 №1

$1009 \mid 19$, 95, 59, 5

$1009 \mid 23$, 92, 89, 4

$1009 \mid 29$, 87, 139, 3

$1009 \mid 31$, 93, 79, 3

$1007 \mid 31$, 93, 77, 3

$1007 \mid 29$, 87, 137, 3

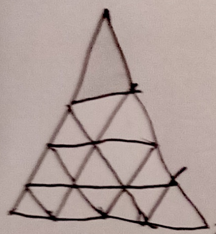
$1007 \mid 23$, 92, 87, 4

$1007 \mid 19$, 95, 57, 53, 53

$7\cdot9\cdot13$ $2020\cdot2018\cdot2014$

$7\cdot9\cdot13 + 101\cdot2^2\cdot5\cdot1009\cdot2\cdot19\cdot53\cdot2 =$

$= 3^2\cdot7\cdot13 + 2^4\cdot5\cdot19\cdot53\cdot101\cdot1009$ $2\frac{2}{9}$

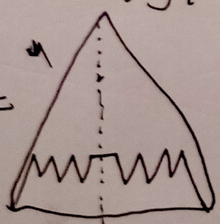


$t\ \xrightarrow{\cancel{(94-t)}}\ 94$

$t\ \xrightarrow{v(9-t)}\ 9$ $6\frac{1}{9}ч + \frac{6}{9}$

$t+\frac{2}{3}\ \xrightarrow{1{,}6v\,(8\frac{35}{60}-\frac{2}{3}-t)}\ 8\frac{35}{60}$ $6\frac{7}{9}$

$v\cdot\frac{25}{9}ч =$



$1\frac{3}{5}v\cdot\frac{20}{9}ч$

$9-t=\frac{16}{10}\cdot\left(8\frac{35}{60}-\frac{2}{3}-t\right)$

$9=\frac{8}{5}\left(8\frac{7}{12}-\frac{2}{3}\right)-0{,}6t$

t $2\to1$ 9

$0{,}6t=\frac{8}{5}\cdot\left(\frac{103}{12}-\frac{8}{12}\right)-9=$ $2^6=64$

$t+\frac{2}{3}\ 10\to1009\ 8\frac{7}{12}$

477, 19, 53

$3t=\frac{8}{5}\cdot\frac{95}{12}-9=$ $2^4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot2\cdot8$

~~$9-t=$~~

$45-5t=8\cdot\frac{103}{12}-8\cdot\frac{2}{3}-8t = \frac{38}{3}-\frac{27}{3}=\frac{11}{3}$ 26 $2^{11}\cdot5\cdot3^2$

$(-2)\cdot(-2)\cdot2^5\cdot5$

$t=\frac{11}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{55}{9}ч=6\frac{1}{9}ч$

$\alpha t=\frac{205}{9}-\frac{16}{9}-\frac{135}{9}$ $(-2)\cdot2\cdot5$

$\frac{16}{9}ч$ $t=\frac{65}{9}=\boxed{7\frac{2}{9}ч}$ $(-)$ $\frac{81}{9}ч$

$\frac{8}{5}\cdot\frac{10}{9}$ $\frac{16}{9}=\frac{100+x}{100}$.

Черновик

$$v(9-t)=\frac{8v}{5}\left(8\frac{7}{12}-t-\frac{2}{3}\right)$$

$4\cdot3\cdot9\cdot5$

$12\cdot45=20\cdot27=540$

$$45-5t=8\cdot8\frac{7}{12}-\frac{16}{3}-8t$$

$2\frac{8}{9}=\frac{26}{9}$

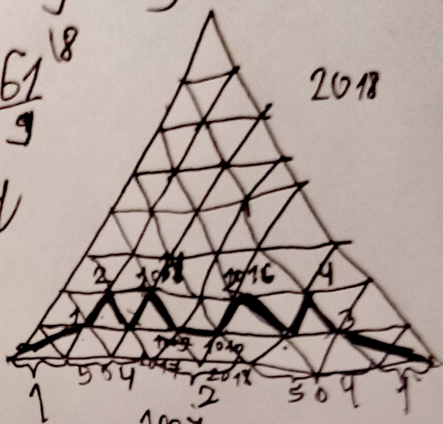
$$3t=\frac{8\cdot103}{12}-\frac{64}{12}-\frac{540}{12}$$

$\frac{61}{9}$

$$t=\frac{824-64-540}{36}=\frac{220}{36}=\frac{55}{9}=6\frac{1}{9}\text{ ч}$$

$$v\cdot\frac{26}{9}=\frac{8v}{5}\cdot\left(\frac{103}{12}-6\frac{7}{9}\text{ ч}\right)$$

$$\frac{130}{72}=\frac{618}{72}-\frac{448}{72}$$



1012

$1 \dots 1007$

$$S=v\cdot(9-t)$$

$$S=\frac{8}{5}v\cdot\left(\frac{103}{12}-\left(t+\frac{8}{12}\right)\right)=\frac{8}{5}v\left(\frac{95}{12}-t\right)$$

1 2 1

$1+1\cdot2$ 6 3

$1\to2+1$

$2\to1+2\cdot2$

$$9-t=\frac{8}{5}\cdot\frac{95}{12}-\frac{8}{5}t$$

$$\left(9-6\frac{7}{9}\right)=2\frac{2}{9}$$

$1\to3$ 2014 1007

$2\to5$

$3\to7$ ~~504~~

$x\to2x+1$ 503

$$\frac{3}{5}t=\frac{190}{15}-\frac{135}{15}$$

$$3t=\frac{190}{3}-\frac{135}{3}=\frac{55}{9}=\boxed{6\frac{1}{9}}\text{ ч}$$

$$v\cdot\left(9-6\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{5}v\left(\frac{95}{12}-6\frac{1}{9}\right)$$

$4x+2=2018$

$$2\frac{8}{9}=\frac{8}{5}\left(\frac{570}{72}-\frac{440}{72}\right)$$

$x=\frac{2016}{4}=504$

$$\frac{26}{9}=\frac{8}{5}\cdot\frac{130}{72}$$

~~$x=30\%$~~

$$v\cdot\frac{26}{9}=\frac{20}{9}\cdot v\cdot\frac{100+x}{100}\qquad 13=\frac{100+x}{10}=10+\frac{x}{10}$$

~~$60+420+480$~~ $+\ 503\cdot300+504\cdot60=\ \cdot 2017$

$60\,(503\cdot5+504)$

$180\,(n-2)$

$300\,(503+104)$

~~$2\cdot2020$~~

~~Чистовик~~ Черновик

2027

~~Задача №1~~

$7\cdot9\cdot13 + -7\cdot-9\cdot-13$

~~Докажем, что $N \vdots 11$:~~

~~1) $7 \equiv -4 \pmod{11}$~~
~~$9 \equiv -2 \pmod{11}$~~
~~$13 \equiv 2 \pmod{11}$~~
~~$\Rightarrow 7\cdot9\cdot13 \equiv (-4)\cdot(-2)\cdot2 \pmod{11} \Leftrightarrow$~~
~~$\Leftrightarrow 7\cdot9\cdot13 \underset{11}{\equiv} 16 \underset{11}{\equiv} 5$~~

~~2) $2020 \equiv -4 \pmod{11}$~~
~~$2018 \equiv 5 \pmod{11}$~~
~~$2014 \equiv 1 \pmod{11}$~~

№1

7
5 $9 \underset{17}{\equiv} 3$
13

2
2
5
101
2
1009
2
53
19

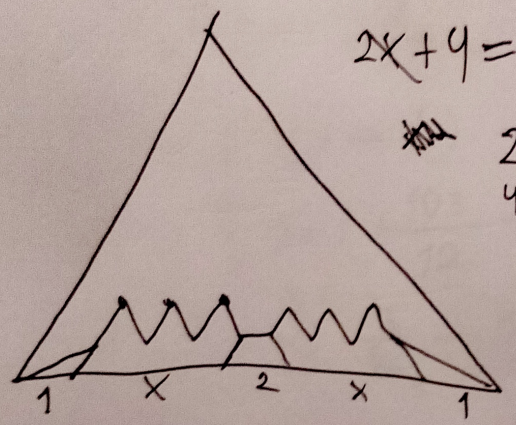
16
5
$19 \underset{17}{\equiv} 1 - 90$
53
101
1009

$2x+4=l$

$2x+1$

$4x+2=2018$

$x=504$



230
−320
90

2020
−2300
−320
−90

$2020 : 23 = 87$
184
180
161
19

$\equiv 2$

2 −4 −8

2^{-64}

2020
2018

2018
2014
8072
2018
4036
4064252
× 2020
8128504
+8128504
82097890 4
+ 819
820979723

$1009 : 17 = 59$
85
159
153
6

$63 \times 13 = 189$
+ 63
$819 : 17 = 48$
68
139
136
3

$820979723 : 23 = 35$
69
130
115
159

1 3
5 6
2
2 7
9

$1 \equiv 19$
−4

23
× 87
161
184
01

× 23
6

−10
6 −630
115 −400
−170
60

−4
−6
−10
1
−10

$2020 = 23\cdot87 + 19 \underset{23}{\equiv} 14$

$7(7+2)(7+4) + 2014(2014+4)(2014+6)$

$7^3 + 2014^3 + 6\cdot7^2 + 8\cdot7 + 10\cdot2014^2 + 24\cdot2014$

Чистовик

№ 4

Пусть $S_1 = \frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \ldots \cdot \frac{1020}{1021} \cdot \frac{1022}{1023}$ и

$S_2 = \frac{101}{102} \cdot \frac{103}{104} \cdot \ldots \cdot \frac{1021}{1022} \cdot \frac{1023}{1024}$. Тогда $S_1 S_2 =$

$= \frac{100}{\cancel{101}} \cdot \frac{\cancel{101}}{\cancel{102}} \cdot \frac{\cancel{102}}{\cancel{103}} \cdot \frac{\cancel{103}}{\cancel{104}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{1020}}{\cancel{1021}} \cdot \frac{\cancel{1021}}{\cancel{1022}} \cdot \frac{\cancel{1022}}{\cancel{1023}} \cdot \frac{\cancel{1023}}{1024} =$

$= \frac{\cancel{100}^{25}}{\cancel{1024}_{256}} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$

Но $\frac{100}{101} < \frac{101}{102}$ (т.к. $1 - \frac{1}{101} < 1 - \frac{1}{102}$, ведь $\frac{1}{101} > \frac{1}{102}$, т.к. $102 > 101$);

$\frac{102}{103} < \frac{103}{104}$ (аналогично); …; $\frac{1020}{1021} < \frac{1021}{1022}$ (аналогично) и

$\frac{1022}{1023} < \frac{1023}{1024}$ (аналогично). И все числа - положительные.

Значит, $\left(\frac{100}{101} \cdot \ldots \cdot \frac{1022}{1023}\right) < \left(\frac{101}{102} \cdot \ldots \cdot \frac{1023}{1024}\right)$, т.е. $S_1 < S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. $S_1 > 0$) $S_1^2 < S_1 S_2 = \left(\frac{5}{16}\right)^2 \Rightarrow S_1^2 < \left(\frac{5}{16}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. $S_1 > 0$) $S_1 < \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \ldots \cdot \frac{1020}{1021} \cdot \frac{1022}{1023} < \frac{5}{16}$

$\boxed{\text{Ответ: } \left(\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \ldots \cdot \frac{1020}{1021} \cdot \frac{1022}{1023}\right) < \frac{5}{16}}$

Чистовик

№ 2

Пусть t мин – время, в которое обычно выезжает Иван Семёнович $\Rightarrow$ обычно Иван Семёнович выезжает в t мин и приезжает в $9 \cdot 60 = 540$ мин, при этом ~~тратит на~~ проезжает путь $S = V \cdot (540 - t)$ мин, где V – обычная скорость движения.

Однажды Иван Семёнович выехал в $(t+40)$ мин и приехал в $8 \cdot 60 + 35 = 515$ мин, при этом проезжает тот-же путь $S = \frac{100+60}{100} \cdot V \cdot (515 - (t+40))$ мин $= \frac{8}{5} \cdot V \cdot (475 - t)$ мин.

Тогда $\cancel{V} \cdot (540 - t) \cancel{мин} = \frac{8}{5} \cdot \cancel{V} \cdot (475 - t) \cancel{мин} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(540 - t) = 8(475 - t) \Leftrightarrow 2700 - 5t = 3800 - 8t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3t = 1100 \Leftrightarrow t = \frac{1100}{3}$ (мин)

Предположим, что Иван Семёнович приехал в 540 мин, выехав в $(t+40)$ мин, то есть выехав в $\frac{1100}{3} + \frac{120}{3} = \frac{1220}{3}$ мин.

Тогда он проехал путь $S = \frac{100+x}{100} \cdot V \cdot (540 - (t+40))$ мин $=$

$= \left(1 + \frac{x}{100}\right) V \left(\frac{1620}{3} - \frac{1220}{3}\right)$ мин $= \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot V \cdot \frac{400}{3}$ мин, где x – на сколько процентов нужно было увеличить скорость.

Тогда $\cancel{V} \cdot \left(540 - \frac{1100}{3}\right) \cancel{мин} = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \cancel{V} \cdot \frac{400}{3} \cancel{мин} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1620 - 1100}{\cancel{3}} = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{400}{\cancel{3}} \Leftrightarrow 520 = 400\left(1 + \frac{x}{100}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1{,}3 = 1 + \frac{x}{100} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow x = 3 \cdot 10 = 30\%$

$\boxed{\text{Ответ: Иван Семёнович должен был увеличить скорость на 30 \%, чтобы приехать ровно в 9:00}}$