МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Волкова Ия Владимировна**

Класс: **11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Волкова Ия Владимировна

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	100 баллов

ЧИСТОВИК

Вариант 2

№2

Пусть $b = -1$, тогда получим, что уравнение должно решаться:

$$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$|x| - \arcsin x - (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$= \cancel{|x|} - \arcsin x - \arccos x - \cancel{|x|} + 1 + a =$$

$$= -(\arcsin x + \arccos x) + 1 + a = -\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0$$

$$\downarrow$$

$$a = \frac{\pi}{2} - 1$$

Проверим, что при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ для каждого b есть решение.

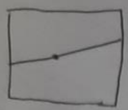
Подставим $x = 1$, тогда

$$1 - \arcsin(1) - b(\arccos(1) + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 =$$

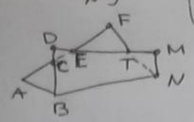
$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

№5 ЧИСТОВИК



→



Обозначим точки, как показано на рисунке.

$MN = AB$ (сгибаем по прямой через центр)

Аналогично, $DB = FN$

$\angle TNM = \angle FET = \angle DEC = \angle ABC$

$\Downarrow$

$\triangle TNM \sim \triangle FET \sim \triangle DEC \sim \triangle ABC$

$\triangle ABC = \triangle TMN$ по катету и острому углу.

Тогда $TN = BC \Rightarrow$

$\Rightarrow TN + NM = AB + BC$

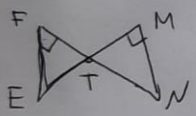
$\Downarrow$

$CD = FT$

$\Downarrow$

$\triangle DCE = \triangle EFT$

Перерисуем



Сторона квадрата $= \sqrt{17}$

$FN + NM = \sqrt{17} = FE + EM$ $(EM = EA)$

Допустим что треугольники подобны с коэффициентом подобия a.

$FE + ET + a \cdot FT = FT + a \cdot TE + a \cdot FE$

$FT \cdot (a-1) = TE(a-1) + FE \cdot (a-1)$

$(a-1)(TE + FE - FT) = 0$

$TE + FE - FT \neq 0$ (стороны треугольника)

$\Downarrow$

$a = 1$

Треугольники равны. (чистовик)

$\triangle ABC = \triangle CDE = \triangle EFT = \triangle TMN$

$\sqrt{17} = \underset{x}{TF} + TN + \underset{y}{MN}$

$\sqrt{17} = x + \sqrt{x^2+y^2} + y$

xy должно быть максимальным

При фиксированной сумме длин сторон прямоугольного треугольника площадь максимальная в равнобедренном.

$x = y$

$\sqrt{17} = 2x + \sqrt{2x^2}$

$\sqrt{17} = 2x + x\sqrt{2}$

$\sqrt{17} = x(2+\sqrt{2})$

$x = \dfrac{\sqrt{17}}{(2+\sqrt{2})}$

Тогда площадь всей фигуры $= \dfrac{17}{2} + \dfrac{x^2}{2} \cdot 2 =$

$= \dfrac{17}{2} + \dfrac{17}{6+4\sqrt{2}} = 17\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6+4\sqrt{2}}\right)$

Ответ: $17\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6+4\sqrt{2}}\right)$

N 1 $\boxed{\text{ЧИСТОВИК}}$

В начале будут идти числа 20, 21, ..., 99 -

будет 80 двузначных, т.е. 160 цифр.

Остаются 2021 − 160 = 1861 цифра

Потом идут 100, 101, 102, ... куда поместится

$$\left\lfloor \frac{1861}{3} \right\rfloor = 620 \text{ чисел}$$

$\Downarrow$

до числа 719 включительно

Т.к. осталась 1 цифра, то после 719 идет

720, т.е. 7

Ответ: 7

N 3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$u = x^2 - 3$$

$$2^{\lg u} = \lg 2^{u+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$u^{\lg 2} = (u+1)\lg 2$$

$$h(u) = u\lg 2 + \lg 2 - u^{\lg 2}$$

$$h'(u) = \lg 2 - \lg 2 \cdot u^{\lg 2 - 1}$$

$$h'(u) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lg 2 - \lg 2 \cdot u^{\lg 2 - 1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$u = 1$$

ЧИСТОВИК

Получаем, что на $[0;1]$ h – спадает

а на $[1;+\infty)$ h – возрастает

$h(0) = \lg 2 > 0$

$h(1) = 2\lg 2 - 1 < 0$, так как $\lg 2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{10} \Leftrightarrow 4 < 10$

$h(100) = 101\lg 2 - 4 > 0$, так как $\lg 2 > \frac{4}{101}$

Получаем ровно 1 корень на $(0;1)$

и ровно 1 корень на $(1;100)$

При $u \geq 100$ очевидно корней нет.

Получаем два корня $u_1, u_2 > 0 \Rightarrow x^2 - 3 > 0$

Тогда $x^2 - 3 = u_1$ даст 2 корня и

$x^2 - 3 = u_2$ даст 2 корня.

$\boxed{\text{Ответ: 4 корня}}$

№4 $\boxed{\text{чистовик}}$

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Пусть $x=\frac{a}{2}$

$y=\frac{b}{3}$

$$\begin{cases} a-b+\frac{6}{ab}=6 \\ 3z-3a+\frac{2}{az}=2 \\ 2b-2z+\frac{3}{bz}=3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a-b+\frac{6}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=6 & \Big|\cdot\frac{a-b}{6} \\ 3(z-a)+\frac{2}{z-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{z}\right)=2 & \Big|\cdot\frac{z-a}{2} \\ 2(b-z)+\frac{3}{b-z}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)=3 & \Big|\cdot\frac{b-z}{3} \end{cases}$$

Запишем сумму

$$\frac{(a-b)^2}{6}+\frac{3}{2}(z-a)^2+\frac{2}{3}(b-z)^2+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z}=a-a+b-b+z-z$$

$$\frac{\overset{\geq 0}{(a-b)^2}}{6}+\frac{3}{2}\overset{\geq 0}{(z-a)^2}+\frac{2}{3}\overset{\geq 0}{(b-z)^2}=0$$

$$\begin{cases} a=b \\ z=a \\ b=z \end{cases} \qquad z=a=b$$

ЧИСТОВИК

Запишем первое

$$z - z + \frac{6}{z^2} = 6$$

$z = \pm 1$

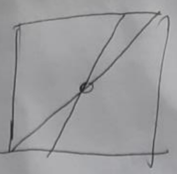
Ответ

$$\boxed{\text{Тогда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 \end{cases} \end{array}\right.}$$

черновик

$FE \cdot ET + aFT = FT + aTE + aFE$

$S = 17$



$17 : 2 = 8{,}5$

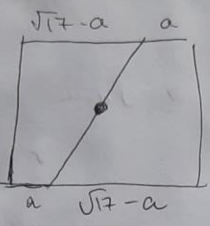
$\frac{17}{2} + \frac{x^2}{2} \cdot 2 = \frac{17}{2} + \frac{17}{(2+\sqrt{2})^2} \cdot 2$

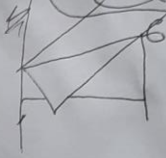
$= \frac{17}{2} + \frac{17}{4+2\cdot 2\sqrt{2}+2} \cdot 4 = \frac{17}{6+4\sqrt{2}}$

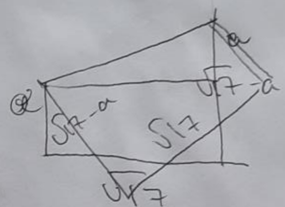
$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6$

$2x^2y - 3x^2y^2 + 1 = 6xy$

$xy(2x - 3y - 6) = 1$







$xy(2x - 3y - 6) = 1$

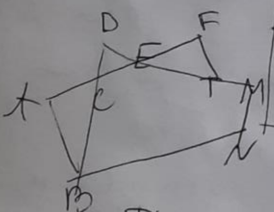
$xz(3z - 6x - 2) = 1$

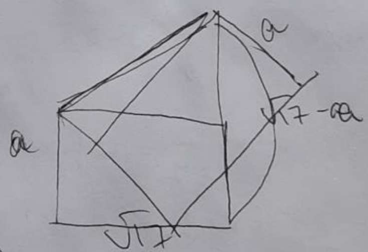
$yz(6y - 2z - 3) = 1$

$a - (\sqrt{17} - a) =$

$= a - \sqrt{17} + a =$

$= 2a - \sqrt{17}$





$TMN = FET =$
$= DEC = ABC$

$2x - 3y + \frac{1}{xy} + 3z - 6x + \frac{1}{xz} + 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 6 + 2 + 3$

$-4x + 3y + z + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}$

$-4x + 3y + z + \frac{x+y+z}{xyz} = 11$

стр 8 $= \frac{x+y+z}{xyz}$

$\frac{z+y+x}{xyz} =$

(черновик)

20 21 22 23 24

2021 место

2значные
с 20 до 99
80шт

всего 160 цифр

3значные с
100 по 999
900 шт

Всего 2700 цифр

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

1861 цифра на 3знач.

$1861 : 3 = 620$, ост. 1

$$\begin{array}{r} 620 \\ \times\ 3 \\ \hline 1860 \end{array}$$

ровно 620 чисел.
и 1 ост.

1+99
100 – 1ое
2+99 101 – 2ое
– 620ое

$$\begin{array}{r} 620 \\ +\ 99 \\ \hline 719 \end{array}$$

620+
99
719

719 – 620ое
ост. 1 →
7

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$|x| - \arcsin x + b \cdot \arccos x + b|x| - b + a = 0$

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \quad | \cdot xy \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$2x^2y - 3xy^2 + 1 = 6xy$

$3xz^2 - 6x^2z + 1 = 2xz$

$6y^2z - 2yz^2 + 1 = 3yz$

Стр 9

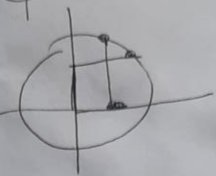
(ЧЕРНОВИК)

$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) = -a$

 $x \in [-1; 1]$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$



$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\pi/2 - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$

$|x| - \arcsin x + b(\frac{\pi}{2} - \arcsin x + |x| - 1) = -a$

$(-\arcsin x + |x| + a) + b(-\arcsin x + |x| + \frac{\pi}{2} - 1) = 0$

Пусть $a = \frac{\pi}{2} - 1$

$(-\arcsin x + |x| + \frac{\pi}{2} - 1)(b + 1) = 0$

$b = -1$

$-\arcsin x + |x| + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

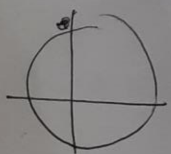
$x = -1$

$\arcsin x = -\frac{\pi}{2}$

$x = -1$

$x = 1$

$\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$



$x = 1$

$\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Да

$-\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

стр. 10

ЧЕРНОВИК

Дано

$(-\arcsin x+|x|+a)+b(-\arcsin x+|x|+\frac{\pi}{2}-1)=0$

ABC = TMN

TN = BC

$a\neq\frac{\pi}{2}-1$

$a=\frac{\pi}{2}-1+t \quad t\neq0$

$(-\arcsin x+|x|+\frac{\pi}{2}-1)+t+$

$+b(-\arcsin x+|x|+\frac{\pi}{2}-1)=0$

$\underbrace{(-\arcsin x+|x|+\frac{\pi}{2}-1)}_{0}(b+1)\cancel{+t}=0$

$=-t$

$t\neq0$

Пусть $b=-1$

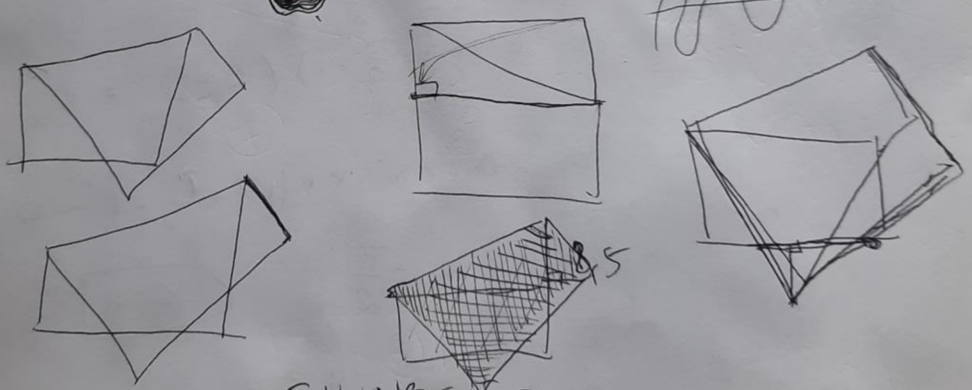
Тогда

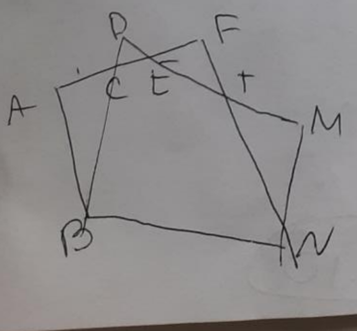
$0=-t$

нет реш.

$2^{\lg(x^2-3)}=$

$=\lg 2^{x^2-2}$





$FN+NB=17$

$=FE+EM$

$EM=EA$

отв. 11