МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хлебина Ирина Андреевна**

Класс: **8**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Хлебина Ирина Андреевна

Класс: 8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

t v Черновик

$S = tv$

$t-40-25=t-65$ $1{,}6v$

$(t-65)1{,}6v$

$t\cancel{v}=(t-65)1{,}6\cancel{v}$

$t=1{,}6t-104$

$104=0{,}6t$

$t=\frac{104}{0{,}6}$

$t=\frac{1040}{6}$

$t=\frac{520}{3}$

$t=173\frac{1}{3}$

$133\times 3=300+90+9=399$

$$\begin{array}{r} \times\ 65 \\ 16 \\ \hline +\ 390 \\ 65 \\ \hline 1040 \end{array}$$

$\cancel{\frac{65}{10}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{2}\cdot\frac{3}{5}=3{,}9}$

$65\cdot\frac{3}{5}=13\cdot 3=39$

$39+65=104$

$173\frac{1}{3}\cancel{v}=133\frac{1}{3}a\cancel{v}$

$a=\frac{\frac{520}{3}}{\frac{400}{3}}=\frac{520}{400}=\frac{260}{200}=\frac{130}{100}=\frac{65}{50}=\frac{13}{10}=1{,}3$

$300+210+9+1=$

30%

14 15

12:20

8 $\quad 8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8=8^6$

$8^5\cdot 100000$

$8^5\cdot 200000$

$1+2+3+4+5+6+7+8=\underline{36}$

$\cancel{34\cdot 3=90+12=102}$

$$\begin{array}{r|l} 111111 & 37 \\ -111 & \overline{3003} \\ 111 & \end{array}$$

$37\cdot 3=90+21=111$

$8^5\cdot 36\cdot(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1)=$

$=8^5\cdot 36\cdot 111111$

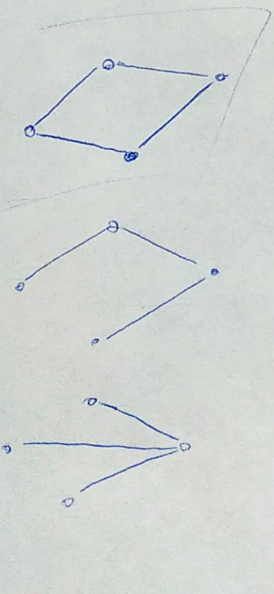
$\cancel{\frac{100}{1024}<8}$

$A<\sqrt{\frac{100}{1024}}=\sqrt{\frac{25}{256}}=\frac{5}{16}$

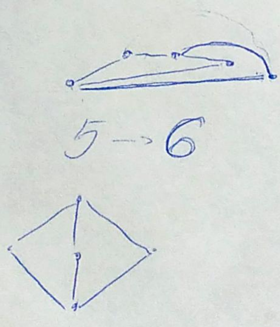
$\frac{4\cdot3\cdot2}{6}=4$

4 2.

~~Среди любых 4 не более~~



$\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=20\cdot19\cdot3$



5 → 6

$20\cdot19\cdot2=40\cdot19=760$

$\frac{760}{20-2}=\frac{760}{18}=\frac{380}{9}=$

$=42\frac{2}{9}$

$7\cdot9\cdot13+2020\cdot2018\cdot2014$ Черновик

$2020 : 7 = 28$, -14, 62, -56, 60 $2018 : 7 = 28$, -14, 61, -56, 58 $2014 : 7 = 28$, -14, 61, -56, 54

1009

$2020 : 13 = 15$, -13, 72, -65, 70

$\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{5}$ $\cancel{7}$ $\cancel{9}$ 11 $\cancel{13}$ 17 19

~~$2\cdot(-1)\cdot(2)$~~ $(-4)\cdot(-2)\cdot(2)+$

$(-4)\cdot5\cdot1=16-20=5-9$

11 1980
1991
2002
2013

$7\cdot9\cdot13+2\cdot5\cdot2\cdot101\cdot2\cdot1009\cdot2\cdot1007$

$a(a+2)(a+6)+b(b-2)(b-6)=(a^2+2a)(a+6)+(b^2-2b)(b-6)=$

$=a^3+6a^2+2a^2+12a+b^3-6b^2-2b^2+12b=$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+8(a-b)(a+b)+12(a+b)=$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2+8a-8b+12a+12b)=(a+b)(a^2-ab+b^2+$

$+20a+4b)$

$\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$ $7\cdot12=$
$=70+14=$
$=84$
$+11$
95

x $(9-x)v$

$35-40=7$ 55

~~$x+40$~~ $\frac{2}{3}$ $(8\frac{7}{12}-x-\frac{2}{3})1{,}6v$

$(9-x)\cancel{v}=(8\frac{7}{12}-x-\frac{2}{3})1{,}6\cancel{v}$

$1{,}6=\frac{8}{5}$

$38\cdot5=190$

$9-x=(7\frac{11}{12}-x)1{,}6$

$\frac{95}{12}\cdot\frac{8}{5}=\frac{38}{3}=12\frac{2}{3}$

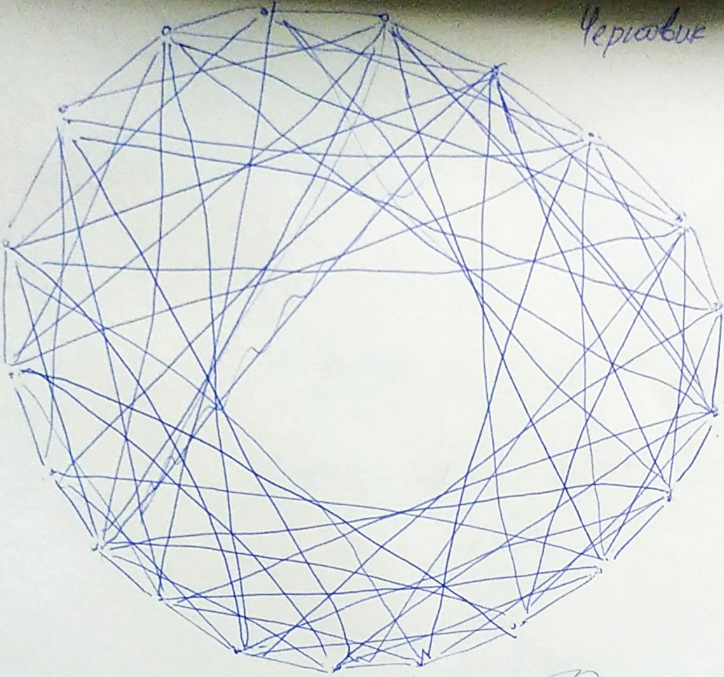
$9-x=12\frac{2}{3}-\frac{8x}{5}$

$\frac{3}{5}x=3\frac{2}{3}$

$\frac{38}{3}\cdot\frac{5}{3}=\frac{190}{9}=21\frac{1}{9}$

$x=21\frac{1}{9}$

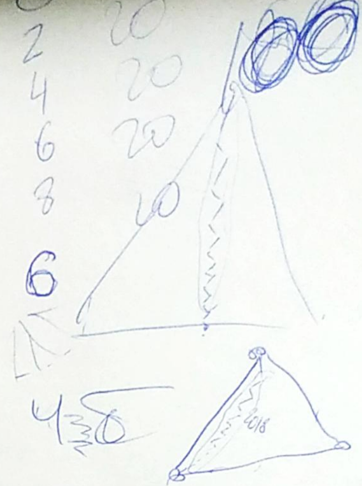
Черновик



0
2
4
6
8

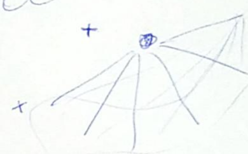
20
20
20
20

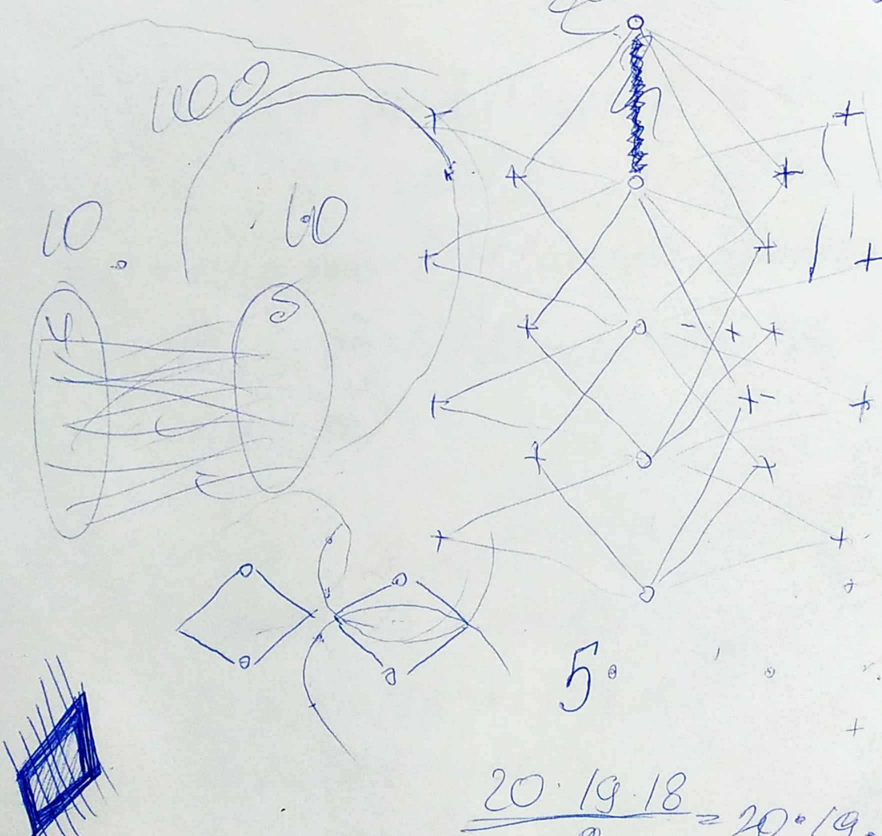
6



4 3 5 0

100

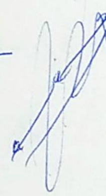




$\frac{5+4}{2} =$
$=10$

$10\cdot2=20$

4 6 8



$\frac{20\cdot19}{2} = \underline{190}$

101

15

5

$$\frac{20\cdot19\cdot18}{8} = \frac{20\cdot19\cdot3}{18} = \frac{190}{3} = 63\frac{1}{3}$$

~~101·18~~

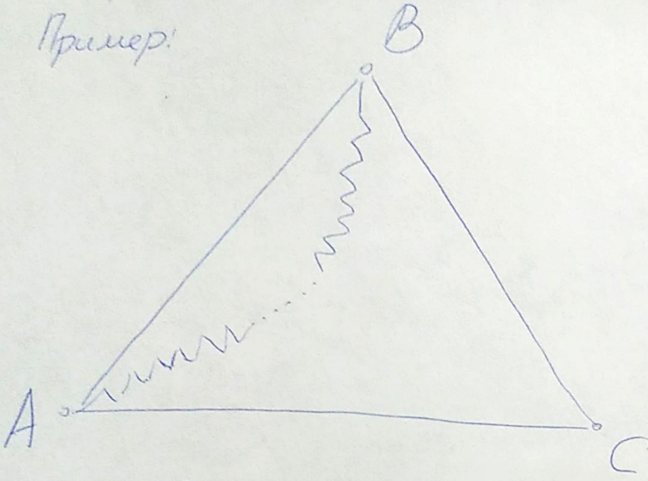
~~20·19·3·2~~

Чистовик

Задание 7

Да, можно

Пример:



Нужно разрезать треугольник по ~~не~~ простой ломаной, не пересекающей стороны $\triangle ABC$, состоящей из 2020 вершин и 2019 звеньев, ~~начинающейся в A и зака~~ с концами в точках A и B.

Тогда многоугольник, состоящий из стороны AB и ломаной, будет иметь 2020 сторон, то есть 2020 вершин, значит это 2020-угольник. Многоугольник, состоящий из сторон BC, AC и ломаной, будет состоять из 2021 стороны, из 2021 вершины, это будет 2021-угольник.

Задание 5

Пусть джентельмены это вершины, если они знакомы, то между ними ребро. Тогда количество рёбер это количество рёбер в графе.

Ответ 100.

Пример:

Пусть 10 джентельменов любят футбол, а остальные 10 нет. Тогда пусть каждый джентельмен любящий ~~играть~~ в футбол знает всех, кто его не любит, но не знает тех, кто любит футбол. Мы получим полный 2-дольный граф ~~со~~ с $10 \cdot 10 = 100$ рёбрами, т.к. в двудольных графах нет циклов, то не будет и 3 джентельменов попарно друг друга знающих.

кик

Чистовик

Задание 6

Рассмотрим 2-ух мальчиков, соединим их отрезком, заметим, что если оба мальчика находятся на расстоянии 5 м от какой-то девочки, то эта девочка стоит на ~~рас~~ серединном перпендикуляре к этому отрезку. Теперь заметим, что в одной полуплоскости от отрезка есть только 1 место на серединном перпендикуляре, удалённое на 5 м от мальчиков, а значит к каждому отрезку прилагается не более 2-ух девочек (2 полуплоскости).

Всего отрезков: 5 вариантов выбрать первую точку (мальчика), 4 варианта выбрать вторую, и нужно разделить на 2!, т.к. не важно в какой последовательности мы выбрали точку.

$$\frac{5\cdot 4}{2!}=10$$

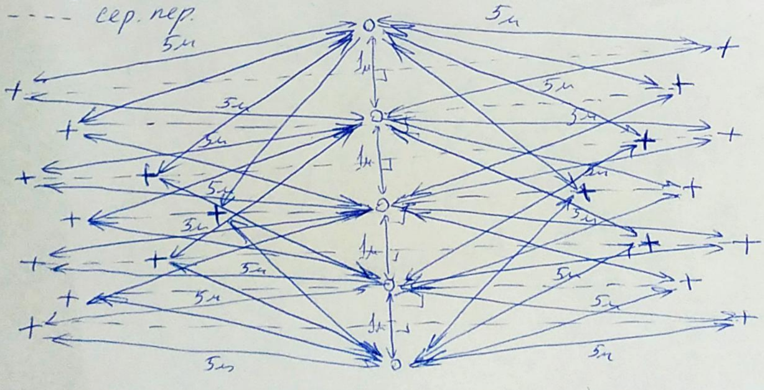
Тогда девочек не больше $10\cdot 2=20$.

Пример:

o - мальчик

+ - девочка

- - - - сер. пер.



Пример работает, т.к. каждые 2 + находится либо на разных сер. перах, либо должны находиться на разных расстояних от прямой мальчиков, значит не совпадают.

Задание 5

Пусть джентельмены это вершины, если они знакомы, то между ними ребро. Тогда количество рёбер это количество рёбер в графе.

Ответ 100.

Пример:

Пусть 10 джентельменов любят футбол, а остальные 10 нет. Тогда пусть каждый джентельмен любящий ~~играть~~ в футбол знает всех, кто его не любит, но не знает тех, кто любит футбол. Мы получим полный 2-дольный граф ~~со~~ с $10 \cdot 10 = 100$ рёбрами, т.к. в двудольных графах нет циклов, то не будет и 3 джентельменов попарно друг друга знающих.

Чистовик

Задание 4

Обозначим произведение $\frac{100}{101} \times \frac{102}{103} \cdot \ldots \cdot \frac{1020}{1021} \cdot \frac{1022}{1023}$ за A.

Произведением B назовём произведение $\frac{101}{102} \cdot \frac{103}{104} \cdot \ldots \cdot \frac{1021}{1022} \cdot \frac{1023}{1042}$

Заметим, что в A и в B одинаковое количество множителей и каждый i множитель из A меньше ~~каждого~~ i множителя из B, т.к.:

i из A: $\qquad$ i из B

$$\frac{a}{a+1} \vee \frac{a+1}{a+2} \quad \Big| \cdot (a+1)(a+2)$$

$$a(a+2) \vee (a+1)^2$$

$$a^2+2a \vee a^2+2a+1$$

$$a^2+2a < a^2+2a+1 \Rightarrow \frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2}$$

Это значит, что $A<B$, а т.к. $A>0$, то $A \cdot A < A \cdot B$:

$$A^2 < A \cdot B = \frac{100}{101} \cdot \frac{101}{102} \cdot \ldots \cdot \frac{1022}{1023} \cdot \frac{1023}{1024} = \frac{100}{1024}$$

Т.к. обе части больше 0, то можем извлечь корень из обеих частей и неравенство останется верным:

$$A < \sqrt{\frac{100}{1024}} = \sqrt{\frac{25}{256}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{5}{16} \Rightarrow A < \frac{5}{16}$$

Чистовик

Задание 3

Сначала найдём сколько всего таких чисел:
На каждое место можем поставить любую из 8 разрешённых цифр, значит вариантов 8^6

У $\frac{1}{8}$ вариантов на первом месте 1, у $\frac{1}{8}$ на первом месте 2 и т.д. На каждом месте распределение цифр одинаково.

Представим каждое число $\overline{abcdef}$ как $a\cdot10^5+b\cdot10^4+c\cdot10^3+$ $+d\cdot10^2+e\cdot10+f$

Тогда в сумме будет $8^6\cdot\frac{1}{8}$ ~~цифр~~ чисел с определённой цифрой на каждом месте. Это значит что сумма равна:

$8^5\cdot1\cdot10^5+8^5\cdot2\cdot10^5+\ldots+8^5\cdot8\cdot10^5+8^5\cdot1\cdot10^4+8^5\cdot2\cdot10^4+\ldots+$ $+8^5\cdot8\cdot10^4+8^5\cdot1\cdot10^3+8^5\cdot2\cdot10^3+\ldots+8^5\cdot8\cdot10^3+8^5\cdot1\cdot10^2+$ $+\ldots+8^5\cdot8\cdot10^2+8^5\cdot1\cdot10+\ldots+8^5\cdot8\cdot10+8^5\cdot1\cdot1+8^5\cdot2\cdot1+\ldots+$ $+8^5\cdot8\cdot1=8^5(10^5(1+2+\ldots+8)+10^4(1+2+\ldots8)+10^3(1+\ldots+8)+$ $+10^2(1+\ldots+8)+10(1+\ldots+8)+1(1+\ldots+8))=8^5\cdot36\cdot(10^5+10^4+\ldots+$ $+1)=8^5\cdot36\cdot111111=8^5\cdot36\cdot37\cdot3\cdot1001$

Заметим что в значении суммы есть множитель 37, значит сумма делится на 37

Чистовик

Задание 2

Пусть он едет на работу t минут, со скоростью v. Тогда расстояние до работы равно tv.

В день когда он ~~опоздал~~ проспал он ехал ~~$t-40$~~ меньше на 40 минут т.к. проспал и еще на 25 минут, т.к. приехал на 25 минут раньше, то есть $(t-40-25)$. Ехал он со скоростью $1{,}6v$ (т.к. $100\%+60\%=160\%$; $160\%=1{,}6$). Он проехал то же самое растояние, значит оно равно $(t-40-25)1{,}6v$. Составим уравнение:

$$(t-40-25)1{,}6v=tv \quad |\cdot\frac{1}{v},\ v\neq0$$

$$(t-65)1{,}6=t$$

$$1{,}6t-104=t$$

$$0{,}6t=104$$

$$t=\frac{1040}{6}$$

$$t=\frac{520}{3}$$

$$t=173\frac{1}{3}$$

Если бы он проспал на 40 минут и приехал во время, то в пути он бы был $t-40=133\frac{1}{3}$ минуты, предположим, что он двигался со скоростью av, где a показывает проценты. Тогда:

$$tv=(t-40)av \quad |\cdot\frac{1}{v};\ v\neq0$$

$$173\frac{1}{3}=133\frac{1}{3}a$$

$$a=\frac{173\frac{1}{3}}{133\frac{1}{3}}$$

$$a=\frac{520}{400}$$

$$a=1{,}3$$

Т.к. $1{,}3=130\%$

$130\%-100\%=30\%$

Ответ: Иван Семёнович должен был ехать со скоростью на 30% большей обычной.

Чистовик

Задание 1

Пусть $a=7$, $b=2020$, тогда:

$N = 7\cdot 9\cdot 13 + 2020\cdot 2018\cdot 2014 = a(a+2)(a+6)+b(b-2)(b-6)=$

$= a^3+6a^2+2a^2+12a+b^3-6b^2-2b^2+12b=$

$= a^3+8a^2+12a+b^3-8b^2+12b = (a+b)(a^2-ab+b^2)+8(a-b)(a+b)+$

$+12(a+b) = (a+b)(a^2-ab+b^2+8a-8b+12) = \cancel{(a+b)}$

$a+b=2027$

$a^2-ab+b^2+8a-8b+12>1$, т.к. $7\cdot 9\cdot 13+2020\cdot 2018\cdot 2014>2027$

Получаем, что это число делится ~~на~~ хотя бы на 2 числа, не равных 1, значит это число составное.