МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Парахин Николай Викторович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Парахин Николай Викторович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	5 баллов	15 баллов	80 баллов

Чистовик

№ 1

~~Пусть~~ Посчитаем, сколько всего двузначных (2х знач.) чисел: 20 - 29 : 10, 30 - 39 : 10, 40 - 49 : 10 ... 90 - 99 : 10, => всего двузначных - 80 чисел. $80 \cdot 2 = 160$ - цифр, которые занимают места (двузначные числа).

Посчитаем, сколько всего 3х-значных чисел: 100 - 199 : 100, 200 - 299 : 100, ... 900 - 999 : 100, тогда всего чисел $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ чисел.

сотни, десятки, единицы

$900 \cdot 3 = 2700$ - цифр, занимающих места

$2700 > 2021 - 160$, => тогда цифра искомая х берется среди 3х-значных чисел.

$2021 - 160 = 1861$, - под цифры 3х значных чисел.

[100 - 199] - 100 чисел, => 300 цифр : $1861 - 300 = 1561$

[200 - 299] - 100 чисел, => 300 цифр : $1561 - 300 = 1261$

[300 - 399] - 100 чисел, => 300 цифр : $1261 - 300 = 961$

[400 - 499] - 100 чисел => 300 цифр : $961 - 300 = 661$

[500 - 599] - 100 чисел, => 300 цифр : $661 - 300 = 361$

[600 - 699] - 100 чисел, => 300 цифр : $361 - 300 = 61$

[700 - 799] - 100 чисел => 300 цифр > 61 цифры остав, тогда цифра лежит в диапазоне [700 - 799]

[700 - 719] - 20 чисел, $20 \cdot 3 = 60$ цифр, =>

$61 - 60 = 1$, первая цифра в числе $720 - 7$

Ответ: 7

Ответ: 7

Чистовик

№2

$$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, тогда

$$|x| - \arcsin x + b\cdot(|x| - \arcsin x + \frac{\pi}{2} - 1) + a = 0$$

Замена: $t = |x| - \arcsin x$, тогда, ур-е примет вид:

$$t + b\cdot(t + \frac{\pi}{2} - 1) + a = 0$$

$$t + b\cdot t + \frac{\pi}{2}\cdot b - b + a = 0$$

$$t(1+b) = b - a - \frac{\pi}{2}b$$

Т.к ур-е должно иметь решение при любом значении, тогда оно имеет решение при $1+b=0$ т.е при $b=-1$, тогда:

$t\cdot 0 = -1 - a + \frac{\pi}{2}$, $a = -1 + \frac{\pi}{2}$, при $b=-1$

тогда ур-е примет вид

$$(1+b)\cdot t = b(1-\frac{\pi}{2}) + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$(1+b)\cdot t = (1+b)(1-\frac{\pi}{2})$$

См. продолжение => ②

Чистовик

продолжение №2:

тогда, при $b \neq -1$:

$t = 1 - \frac{\pi}{2}$, обратная зам:

$|x| - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2}$ (*)

Покажем, что ~~значения~~ это значение достигается при некотором x.

при $x=1$: $|x| - \arcsin x = 1 - \arcsin x =$

$= 1 - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2}$, т.е $x=1$ является решением ур-я (*) независимо от b.

Ответ: $a = -1 + \frac{\pi}{2}$

чистовик

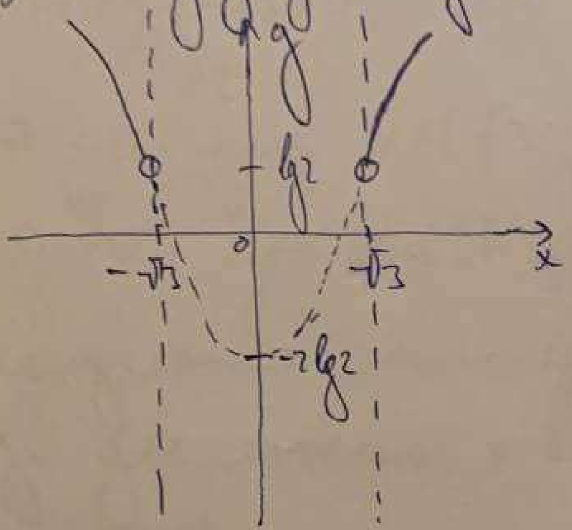
№3

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$, $\quad 2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2\cdot(x^2-2)$

ОДЗ: $x^2-3>0$, $\Rightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$

Рассмотрим функцию: $y=(x^2-2)\cdot\lg 2$; при $x=\pm\sqrt{3}$

$y=\lg 2$



Рассмотрим ф-цию $y=2^{\lg(x^2-3)}$ при $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$

$$y_1' = 2^{\lg(x^2-3)}\cdot\ln 2\cdot(\lg(x^2-3))' = 2^{\lg(x^2-3)}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{(x^2-3)\cdot\ln 10}\cdot 2x =$$

$$= \frac{2}{x^2-3}\cdot\lg 2\cdot 2x$$

Для ф-ции $y_2=\lg 2^{x^2-2}=(x^2-2)\cdot\lg 2$

$y_2' = 2x\cdot\lg 2$.

Сравним производные ф-ций y_1 и y_2.

Т.к обе ф-ции чётные, рассмотрим только область $x>\sqrt{3}$ продолжение $\Rightarrow$

Чистовик

Продолжение №3

Предположим, что $\frac{2^{\lg(x^2-3)}}{x^2-3} < 1$,

учитывая, что $x^2-3>0$,

$2^{\lg(x^2-3)} < x^2-3$, $\Rightarrow$ $\lg 2^{\lg(x^2-3)} < \lg(x^2-3)$

$\lg(x^2-3)\cdot(\underbrace{\lg 2-1}_{<0})<0$, $\Rightarrow$

$\lg(x^2-3)<0$ при $x\in(-\sqrt{3};\sqrt{13})$ и

$\lg(x^2-3)>0$ при $x\in(-\sqrt{13};+\infty)$

Т.о получается, что при $x>-\sqrt{13}$

$y_1' < y_2'$ для любого $x>-\sqrt{13}$,

тогда сравним значения функций

при $x=-\sqrt{13}$: $\lg 2 > \frac{2}{11}$,

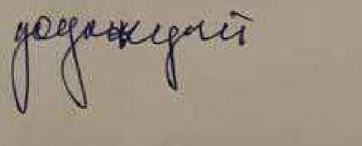
$y_1(-\sqrt{13}) = 2^{\lg 10} = 2$

$y_2(-\sqrt{13}) = \lg 2^{11} = 11\cdot\lg 2$

$2 < 11\cdot\lg 2$

$10^{\frac{1}{3}} > 2 > 10^{\frac{1}{4}}$, т.к. $8 > 2^4 > 10$, $\Rightarrow$

$\frac{1}{3} < \lg 2 < \frac{1}{4}$, $\frac{2}{11} < \frac{1}{3}$



$\Rightarrow \lg 2 > \frac{2}{11}$

Чижовых

Продолжение №3

т.о при $x \to -\sqrt{13}$, $y_1'(x) < y_2'(x)$ и $y_1(x) < y_2(x)$ (т.к при $x \to -\sqrt{13}$ эти формулы возрастают) т.о при $x \to -\sqrt{13}$ ф-ция $y_1(x)$ находится всегда ниже, чем $y_2(x)$ и решений нет. При $x = -\sqrt{13}$ мы уже сравнили и получили $y_1(-\sqrt{13}) < y_2(-\sqrt{13})$

Рассмотрим $x \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{13})$:

Заметим, что при $x = 2$, $y(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{\lg(4-3)} = 2^0 = 1$,

$y_2(2) = (4-7) \cdot \lg 2 = 2\lg^2 < 1$ ($\lg 2$ оценим ранее),

т.о получается, что графики пересекаются на промежутке $x \in (-\sqrt{3}; 2)$ и далее, т.к при $x > \sqrt{3}$ ф-ции монотонно возрастают и $y_1(\sqrt{13}) < y_2(\sqrt{13})$.

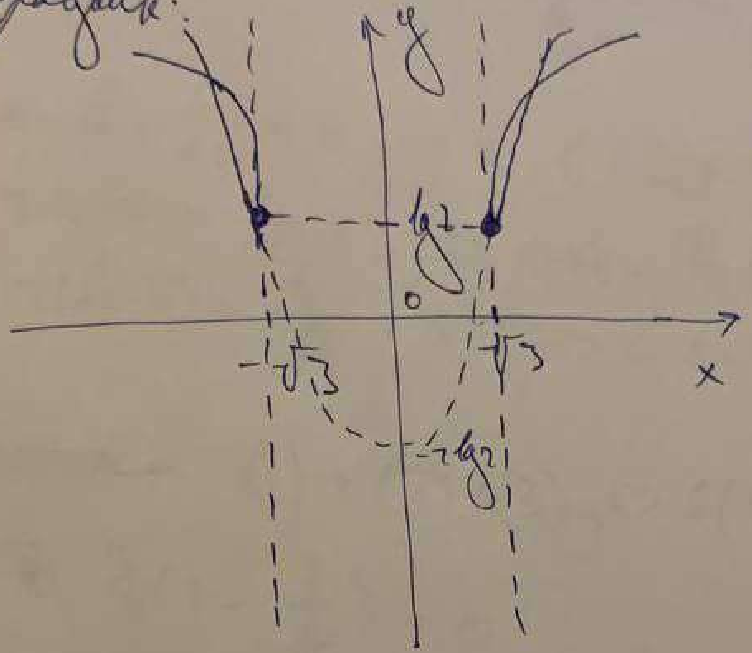
Они пересекают при $x \in (2; \sqrt{13})$ ещё раз, т.о при $x \in (-\sqrt{3}; -\sqrt{13})$ два решения.

Чистовик

Продолжение №3

В силу чётности ф-ции будет ещё два решения при $x \in (-\sqrt{13}; -\sqrt{3})$

График:



Будет 4 решения.

~~Ответ: 4 решения~~

Ответ: 4 решения

Чистовик

№4

№5

$2x = a$

$3y = b$

$z = c$

$$\begin{cases} a - b + \dfrac{1}{\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3}} = 6 \\ 3c - 3a + \dfrac{1}{c\cdot\frac{a}{2}} = 2 \\ 2b - 2c + \dfrac{1}{\frac{b}{3}\cdot c} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + \dfrac{6}{ab} = 6, \Rightarrow a - b = 6\left(1 - \dfrac{1}{ab}\right) (1) \\ 3(c - a) + \dfrac{2}{ac} = 2, \Rightarrow c - a = \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{ac}\right) (2) \\ 2(b - c) + \dfrac{3}{bc} = 3, \Rightarrow b - c = \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{bc}\right) (3) \end{cases}$$

Сложим $(1) + (2) + (3)$, $\Rightarrow 6\left(1 - \dfrac{1}{ab}\right) + \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{ac}\right) +$

$+ \dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{bc}\right) = 0$

$$\frac{49}{6} = \frac{36c + 4b + 9a}{6abc}$$

$49abc = 36c + 4b + 9a$

Из выражения видно, что

$a = b = c = 1 \Rightarrow$; и $a = b = c = -1$, $\Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$

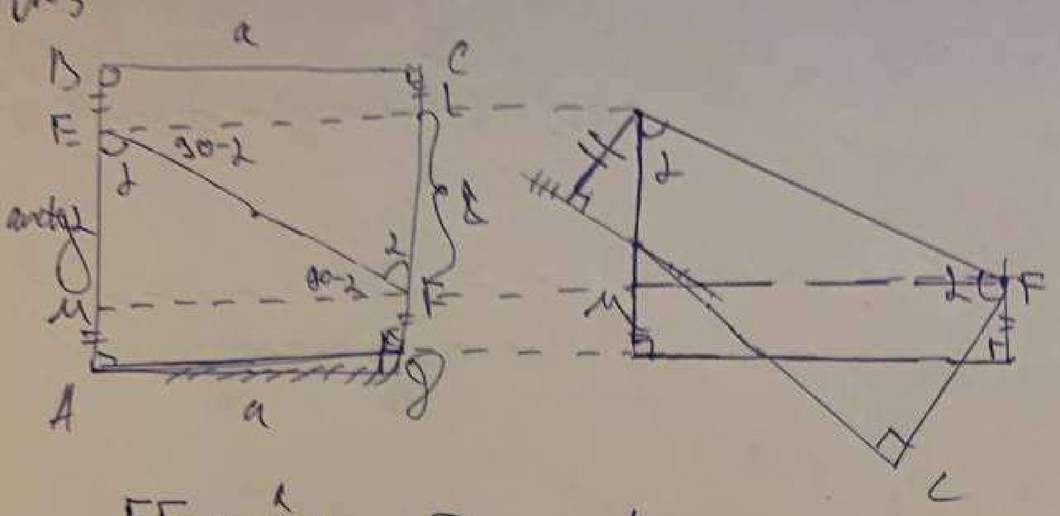
$x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$; $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$

8

Чисто вид

№5



$EF = \frac{a}{\sin\alpha}$, $FL = a\,ctg\,\alpha$, где $a = BC$

$EQ = \frac{BE}{\cos 2\alpha} \Rightarrow AQ = AE - EQ$

$AM = BE = \frac{(a - a\,ctg\,\alpha)}{2} = \frac{a}{2}\cdot(1 - ctg\,\alpha)$

$S_{BEFC} = \frac{1}{2}\cdot a(BE + CF)\frac{a^2}{2}$

$S = \frac{1}{2}AQ\cdot AM$, заметим, что

$tg(2\alpha - 90) = \frac{AM}{AQ}$

$AM = AQ(-ctg\,2\alpha) \Rightarrow S = -\frac{ctg\,2\alpha}{2}\cdot(AQ)^2$

$AQ = \frac{a}{2}ctg\,\alpha + \frac{a}{2} + \frac{a(1 - ctg\,\alpha)}{2\cos 2\alpha}$

$S = -\frac{ctg\,2\alpha}{2}\cdot(AQ)^2 = -\frac{a^2}{4}\cdot\frac{ctg\,\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \sin\alpha}$

Нужно взять производную от S:

11

Продолжение №5 чистовик

$$S' = \frac{4\cos(2x) + 4\sin(2x)}{(2\sin(2x) + 4\sin^2(x))^2} = 0 \;, \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$$

(строгое решение) нас удовлетворяет

$$x = \frac{3\pi}{8}\;, \; 2 = x$$

подставив в S это и будет ответом

$$tg\, 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\;, k \in Z$$

Ответ: $S = -\frac{(a^2)}{4} \cdot ctg\,\frac{3\pi}{8}\,\frac{(\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8})}{\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}} =$

$a^2 = 17$

$$= -\frac{17}{4} \cdot ctg\,\frac{3\pi}{8}\,\frac{(\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8})}{\cos\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}}$$

черновик

Заметим, что при $x=2$, $y_1(2) = 2^{\lg(4-3)} = 2^0 = 1$,

$y_2(2) = (4-2)\cdot\lg 2 = 2\lg 2 < 1$

($\lg 2$ мы оценили ранее),

т.о. получается, что графики пересекаются на промежутке $x \in (\sqrt{3}; 2)$ и далее, т.к. при $x > \sqrt{3}$ ф-ция монотонно возрастает и

$y_1(\sqrt{13}) < y_2(\sqrt{13})$ ~~а~~

Они пересекаются при $x \in (2; \sqrt{13})$ ещё раз, т.о. при $x \in (\sqrt{3}; \sqrt{13})$ два решения

В силу чётности ф-ции будет ещё два решения. при

$x \in (-\sqrt{13}; -\sqrt{3})$

Ответ: 4 решения

Черновик

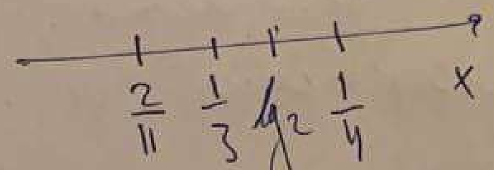
К способу №3

$10^{\frac{1}{3}} > 2 > 10^{\frac{1}{4}}$, т.к.

$8 > 2^4 > 10$ =>

$\frac{1}{3} < \lg 2 < \frac{1}{4}$

$\frac{2}{11} < \frac{1}{3}$



$\Rightarrow \lg 2 > \frac{2}{11}$

то при $x > \sqrt{13}$, $y_1'(x) < y_2'(x)$ и $y_1(x) < y_2(x)$,

(т.к при $x > \sqrt{13}$ эти ф-ции возрастают.)

т.о при $x > \sqrt{13}$

ф-ция $y_1(x)$ находится всегда

ниже, чем $y_2(x)$ и решений нет.

При $x = \sqrt{13}$ мы уже сравнили, и

получили $y_1(\sqrt{13}) < y_2(\sqrt{13})$

Рассмотрим $x \in (\sqrt{3}; \sqrt{13})$.

Рассмотрим ф-цию Черновик

$$y = 2^{\lg(x^2-3)} \quad \text{при } x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$y_1' = 2^{\lg(x^2-3)} \cdot \ln 2 \cdot \cancel{\ } \left(\lg(x^2-3)\right)' =$$

$$= 2^{\lg(x^2-3)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{(x^2-3)\cdot \ln 10} \cdot 2x =$$

$$= \frac{2}{x^2-3} \cdot \lg 2 \cdot 2x$$

Для ф-ции $y_2 = \lg 2^{x^2-2} =$

$$= (x^2-2) \cdot \lg 2$$

$$y_2' = 2x \cdot \lg 2$$

Сравним производные ф-ции y_1 и y_2. Т.к обе функции чётные, ~~то~~ рассмотрим только область $x > \sqrt{3}$

см. продолжение => ②

черновик:

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$$2x = 3y - \frac{1}{xy} - 6$$

$$3y - 3y - \frac{3}{xy} - 18 + \frac{1}{xz} = 2$$

$$\cancel{6y = 3 - \frac{1}{yz} + 2z}$$

$$-2z = 3 - \frac{1}{yz} - 6y$$

$$2z + \frac{1}{yz} = 3 - 6y \;\Big|\cdot z$$

$$\cancel{\frac{2z^2}{z} + \frac{1}{yz^2}}$$

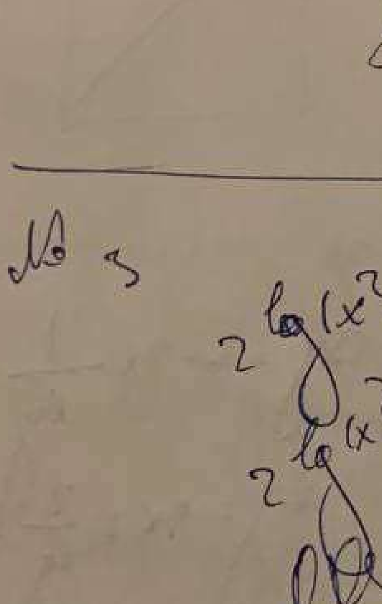
№ 3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg^{x^2-2}$$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2 \cdot (x^2-2)$$

ОДЗ: $x^2 - 3 > 0$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

Рассмотрим функцию:



$y = (x^2-2)\cdot \lg 2$: при $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \lg 2$

№3 – продолжение

(14)

Черновик

№1

20|21|22|23|

=> 20 − 99 , => 99 − 9 = 90 = 80

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 10
30 − 39 20
40 − 49 30
50 − 59 40
60 − 69 50
70 79 60
80 89 70
90 99 80

$20 \cdot 3 = 60$

3

$80 \cdot 2 = 160$, =>

$$\begin{array}{r} -2021 \\ 160 \\ \hline 186 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2021 \\ 160 \\ \hline +1861 \\ 160 \\ \hline 2021 \end{array}$$

700 − ~~779~~ 100 − 999

0, 1, 2, 3,
4, 5, 6, 7, 8, 9, $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
10, 11, 12, 13,
14, 15, 16, 17,
18, 19
21

$900 \cdot 3 = 2700$, > 1861, =>

цифры берутся из 3х значных чисел.

=>

100 − 199 − 100 − $1861 - 100 \cdot 3 = 1861 - 300$

200 − 299 − 100 1561 − 300

$\frac{18000}{\ } = \frac{18}{3} = 6$

300 − 399 − 100 − 1261 − 300

400 − 499 − 961 − 300

500 − 599 − 661 − 300

600 − 699 − 361 − 300

700 − x

$$\begin{array}{r} -361 \\ 3 \\ \hline 700 \\ 6160 \end{array}$$

~~7000~~

$\frac{1}{x}$

$\frac{3}{x}$

Черновик

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$t + b\frac{\pi}{2} + bt - b + a = 0$$

$$b($$

$$t = |x| - \arcsin x$$

$$t + b\left(\frac{\pi}{2} + t - 1\right) + a = 0$$

$$t + b\frac{\pi}{2} + bt - b + a = 0$$

$$(1+b)t = b - a - b\frac{\pi}{2}$$

Т.к ур-е должно иметь решения при любом значении, то оно имеет решение при $1+b=0$, т.е при $b=-1$, тогда:

$$a = b - b\frac{\pi}{2} = -1 + \frac{\pi}{2} \text{ при } b=-1$$

тогда, ур-е примет вид

$$(1+b) \cdot t = b\left(1-\frac{\pi}{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$(1+b) \cdot t = (1+b)\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$$

при $b \neq -1$, $t = 1 - \frac{\pi}{2}$

$$|x| - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2} \quad (*)$$

Покажем, что это значение достигается при некотором x..

16

Черновик

Предположим, что $\frac{2^{\lg(x^2-3)}}{x^2-3} < 1$

учитывая, что $x^2-3>0$,

$2^{\lg(x^2-3)} < x^2-3$, =>

$\lg 2^{\lg(x^2-3)} < \lg(x^2-3)$

$\lg(x^2-3)\cdot(\lg 2-1) < 0$

$\lg 2 - 1 < 0$

$49\cdot 46 = 361 + 46 + 81$

$\lg(x^2-3) < 0$ при $x\in(-\sqrt{13};\sqrt{13})$ и

$\lg(x^2-3) > 0$ при $x\in(-\sqrt{13};+\infty)$

Т.о. получается, что при $x>\sqrt{13}$ $y_1' < y_2'$ для любого $x>\sqrt{13}$

тогда сравним значения ф-ций при $x=-\sqrt{13}$: $\exists\ \lg 2 > \frac{2}{11}$

$y_1(-\sqrt{13}) = 2^{\lg 10} = 2$

$y_2(-\sqrt{13}) = \lg_{x} 2^{11} = 11\cdot\lg 2$

$2 < 11\cdot\lg 2$

=> см. след.

Черновик

№ 2

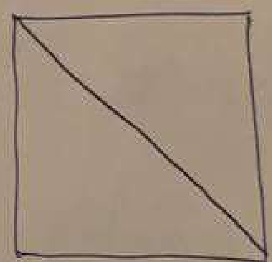
при $x=1$: $|x| - \arcsin x = 1 - \arcsin x =$

$= 1 - \frac{\pi}{2}$ ~~так~~ т.е

$x=1$ является решением ур-я (*) независимо от b.

Ответ: $a = -1 + \frac{\pi}{2}$

№3



$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg \frac{2^{x^2}}{2^2}$$

№4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$$-3y = 6 - 2x - \frac{1}{xy}$$

$$6y = 4x + \frac{2}{xy} - 12$$

$$\cancel{4x + \frac{2}{xy} - 2z + \frac{1}{yz} = 3}$$