**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Нам Александр Олегович**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Нам Александр Олегович

Класс: 11

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Сумма*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 15 баллов | 95 баллов |

Вариант 2 Чистовик Лист 1

№1

$$\underbrace{20\ 21\ \ldots\ 99}_{\text{80 пар цифр}}\ \underbrace{100\ 101\ \ldots\ 999}_{\text{900 троек цифр}}$$

$20 \uparrow 1$, $99 \uparrow 160$, $999 \uparrow 2860$

$2021 > 160$ ⇓ Наша цифра правее выписанных двузначных чисел ⟹ $2021 < 2860$ ⇓ Наша цифра лежит в трёхзначном числе

Позиция, если убрать двузначные числа $= 2021 - 160 = 1861$

Найдём трёхзначное число, в котором лежит наша цифра:

$$100 + \left[\frac{1861-1}{3}\right] = 100 + 620 = 720$$

Определим позицию нашей цифры в числе:

$$(1861 - 1) \equiv 0 \pmod{3}$$

Позиция $= 1 + 0 = 1$

⇓

Наша цифра $= 7$

Ответ: 7

№2

$|x| - \arcsin(x) + b\cdot(\arccos(x) + |x| - 1) + a = 0$ $x \in [-1; 1]$

Т.к. при любом $b$ должны быть корни

$\Downarrow$

Должен быть корень при $b = -1$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} |x| - \arcsin(x) - \arccos(x) - |x| + 1 + a = 0 \\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2 \end{cases}$$

$a - \pi/2 + 1 = 0$

$a = \pi/2 - 1$ $x \in [-1; 1]$

Это единственное возможное знач. $a$, чтобы при $b = -1$ ~~бы~~ существовал корень, а значит осталось только проверить, это значение $a$!

$\Downarrow$ $a = \frac{\pi}{2} - 1$

$|x| - \arcsin(x) + b(\arccos(x) + |x| - 1) + \pi/2 - 1 = 0$

Заметим, что $x = 1$ – корень

$1 - \pi/2 + b\underbrace{(0 + 1 - 1)}_{0} + \pi/2 - 1 = 0$

$\Downarrow$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$ подходит!

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$

№3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot \lg 2$$

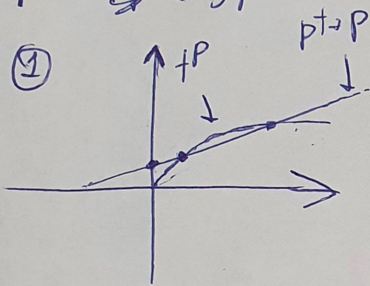
$$\lg 2 = p \in (0;1)$$

$$x^2-3=t$$

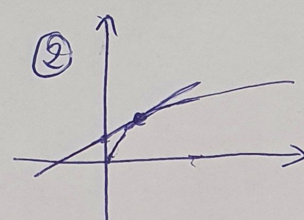
$$t^p = (t+1)p$$

Возможны 3 варианта графика:

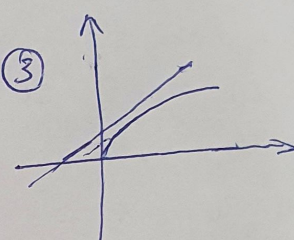
1




2



3



Проверим 1:

$$f(t) = pt+p-t^p$$

$f(0) = p > 0$ (прямая выше)

$f(1) = p+p-1 = 2p-1 = 2\lg 2 - 1 = \lg 4 - 1 < 0$ (степенная функция выше)

$f(10) = 10p+p-10^p = 11p-2 = 11\lg 2 - 2 = \lg\frac{2048}{100} > 0$ (прямая выше)

Существуют 2 корня $t$: 1 между 0 и 1, 2 между 1 и 10 ($t_1$ и $t_2$)

$$\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3=t_1 \\ x^2-3=t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{t_1+3} \\ x=\pm\sqrt{t_2+3} \end{array}\right.$$

Ответ: 4 корня.

Чистовик №4 Лист 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases} \qquad x, y, z \neq 0$$

Замена: $t = \frac{1}{xyz}$

$$\begin{cases} 2x - 3y + tz = 6 \\ -6x + ty + 3z = 2 \\ tx + 6y - 2z = 3 \end{cases}$$

$y$

$$6x - 9y + 3tz - 6x + ty + 3z = 18 + 2$$

$$ty - 9y + 3tz + 3z = 20$$

$$6tx + 36y - 12z - 6tx + t^2y + 3tz = 18 + 2t$$

$$(t^2 + 36)y + (3t - 12)z = 18 + 2t$$

$$\begin{cases} y = \frac{2t + 18 - 3(t-4)z}{t^2 + 36} \\ (t - 9)y + (3t + 3)z = 20 \end{cases}$$

$$\frac{2(t^2 - 81) - 3(t^2 - 13t + 36)z}{t^2 + 36} + (3t + 3)z = 20$$

$$2t^2 - 162 - 20t^2 - 720 + (3t^3 + 3t^2 + 108t + 108 - 3t^2 + 39t - 108)z = 0$$

$$(3t^3 + 147t)z = 18t^2 + 882$$

$$3t(t^2 + 49)z = 18(t^2 + 49)$$

$$z = \frac{6}{t}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2t + 18 - 3(t-4)\cdot z}{t^2+36} \\ z = \dfrac{6}{t} = 6xyz \end{cases}$$

$$y = \frac{2t^2 + 18t - 18(t-4)}{t^3 + 36t}$$

$$y = \frac{2t^2+72}{t^3+36t} = \frac{2(t^2+36)}{t(t^2+36)} = \frac{2}{t} = 2xyz$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + tz = 6 \\ y = \dfrac{2}{t} \\ z = \dfrac{6}{t} \end{cases}$$

$$2x = \frac{6}{t} + 6 - 6$$

$$2x = \frac{6}{t}$$

$$x = \frac{3}{t} = 3xyz$$

$$\begin{cases} x = 3xyz \\ y = 2xyz \\ z = 6xyz \end{cases} \Rightarrow yz = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{3y}$$

$$y = 2xyz$$

$$\Downarrow$$

$$xz = \frac{1}{2}$$

$$y = 2x \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x$$

$$z = 6xyz$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} xy = \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{6}$$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \; (1) \\ x &= -\frac{1}{2} \; (2) \end{aligned}\right.$$

(1) $x = \dfrac{1}{2}$

$$y = \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{3y} = 1$$

(2) $x = -\dfrac{1}{2}$

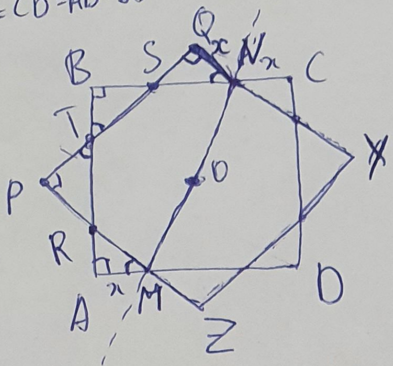
$$y = \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{3y} = -1$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 \end{cases} \end{aligned}\right.$

№5

$AB=BC=CD=AD=17$




Заметим, что трапецию PQNM можно достроить до квадрата с центром в точке O и стороной 17; квадрат PQYZ - квадрат ABCD, повёрнутый относительно центра.

⇓

$\Delta RAM = \Delta RPT = \Delta SBT = \Delta SQN$ (они логически одинаковы)

$\Downarrow$
$S_0$

$S_{MARPTBSQN} = \underbrace{S_{AMNB}}_{\frac{S_{ABCD}}{2}} + 2S_0$

Нам нужно максимизировать площадь

⇓

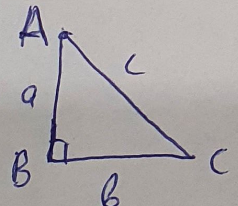
$S_0$ - max

Нам нужно максимизировать $S_0 \Rightarrow$ он равнобедренный

Докажем этот факт:

$p = \frac{17}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

$S_{max}$ - ?




r - радиус вписанной окружности

$r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$

$S = pr = p^2 - pc = p - p\sqrt{a^2+b^2}$

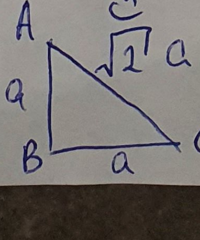
Нам нужно минимизировать $\sqrt{a^2+b^2}$

Н-во о средних:

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$

Р-во достигается при $a=b$

⇓




⇒

$AB = 17 = x + \sqrt{2}x + x$

$x = \dfrac{17}{2+\sqrt{2}}$

$S_{MARPTBSQN} = \dfrac{S_{ABCD}}{2} + 2S_0 = \dfrac{17^2}{2} + x^2 = \dfrac{289}{2} + \dfrac{289}{6+4\sqrt{2}} = \dfrac{867+578\sqrt{2}+289}{6+4\sqrt{2}} =$

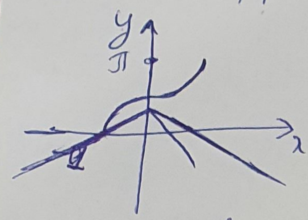
$= \dfrac{1156+578\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} = \dfrac{578+289\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \dfrac{578}{2+\sqrt{2}}$

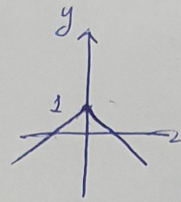
Ответ: $\dfrac{578}{2+\sqrt{2}}$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \pi/2 - 1 = 0$ Черновик лист 8

$\arccos x + |x| - 1 = 0$

$\arccos x = 1 - |x|$




$x = -1$

$0 + 1 - 1 = 0$

$1 + \frac{\pi}{2} \ 1$

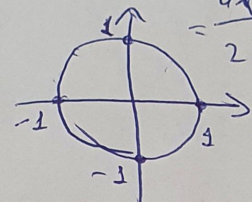
$\frac{1}{2} + \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{(2+\sqrt{2})^2 + 2}{2(2+\sqrt{2})^2} = \frac{4+2+4\sqrt{2}+2}{2(2+\sqrt{2})^2} =$

$\frac{8+4\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{4(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{2}{2+\sqrt{2}}$




$\times \begin{array}{r}17\\17\\ \hline 119\\17\\ \hline 289\end{array}$

$289(3+2\sqrt{2}) -$

$+\begin{array}{r}289\\3\\ \hline 867\end{array}$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \pi/2 - 1 = 0$

① $x = -1$

$1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + b(0 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

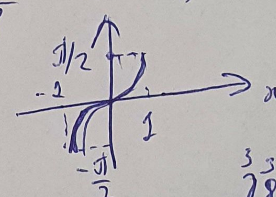
$+\begin{array}{r}289\\289\\ \hline 578\end{array}$

$\times \begin{array}{r}289\\2\\ \hline 578\end{array}$

$\pi = 0$

$x \in \varnothing$

$\arcsin(x)$




$+\begin{array}{r}17\\17\\ \hline 119\\17\\ \hline 289\end{array}$

② $x = 1$

$1 - \pi/2 + b \cdot (0 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$b \cdot \pi = 0$

$+\begin{array}{r}289\\4\\ \hline 1156\end{array}$

$+\begin{array}{r}867\\289\\ \hline 1156\end{array}$

$|x| - \arcsin(x) + \pi/2 - 1 = 0$

$|x| - \arcsin(x) = 1 - \pi/2$

$\begin{array}{r|l}1156 & 2\\ -10 & 578\\ 15 & \\ -14 & \\ 16 & \end{array}$

① $x \geq 0$

$x - \arcsin x = 1 - \pi/2$

$x + \arccos(x) = 1$

$\frac{17^2}{2} + \frac{17^2}{(2+\sqrt{2})^2} =$

$= \frac{2 \cdot 17^2}{2+\sqrt{2}} =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}\right) 17^2 = \frac{6+4\sqrt{2}+2}{2(2+\sqrt{2})^2} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})^2} =$

Черновик Лист 9

$$\begin{array}{r} 900 \\ \times\ 3 \\ \hline 2700 \\ +\ 160 \\ \hline 2860 \end{array}$$

1 2 3 4 5
2 4 8 16 32

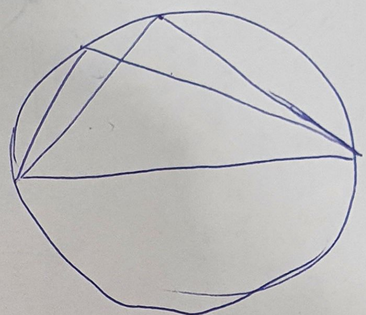
$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 32 \\ \hline 64 \\ +96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ +\ 39 \\ \hline 147 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

$AR \cdot RT = PR \cdot RM$

$\frac{AR}{PR} = \frac{RM}{RT}$



$\left\lfloor \frac{1861}{3} \right\rfloor + 1$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 3 \\ \hline 108 \end{array}$$

$1860 : 3 = 620$

$$\begin{array}{r} 1860 \\ -18 \\ \hline 6 \end{array}$$

$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0 \qquad x \in [-1; 1]$

$\cancel{1)}$ 1) $b = -1$

$\cancel{|x|} - \arcsin x - \arccos x - \cancel{|x|} + 1 + a = 0$

$a + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

$|x| - \arcsin x + b \cdot \arccos x + b|x| - b + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

~~$(b+1)|x| + b \arccos x$~~

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + (\pi/2 - 1) = 0$

$x = 1$

$1 - \cancel{\pi/2} + b \cdot (\pi + \cancel{1} - \cancel{1}) + \cancel{\pi/2} - 1 = 0$

$b\pi = 0$

$\frac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 9}{2+\sqrt{2}}$