МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Веселов Илья Николаевич**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Веселов Илья Николаевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	95 баллов

Чистовик. Вариант 2.

№2. Так как при фиксированном a всегда есть решение, то подставим в качестве параметра в -1, тогда

$$|x| - \arcsin(x) - (\arccos(x) + |x| - 1) + a =$$

$$= -\arccos(x) - \arcsin(x) + 1 + a = -\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0,$$

Значит, что $a = \frac{\pi}{2} - 1$, но нужно проверить, что при ~~данном~~ таком a всегда есть корень при любом b.

Действительно, $x = 1$ — решение:

$$1 - \arcsin(1) + b(\arccos(1) + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 1 - \arcsin(1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0.$$

ЧТД.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

№3. $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$

Сделаем замену $y = x^2 - 3$

$2^{\lg y} = \lg 2^{y+1}$

$y^{\lg 2} = (y+1)\lg 2$

$f(y) = y^{\lg 2}$ — степенная функция

$g(y) = (y+1)\cdot \lg 2$ — прямая

$f''(y) = \lg 2 \cdot (\lg 2 - 1)\cdot y^{\lg 2 - 2} < 0 \Rightarrow f$ — выпуклая вверх

Прямая и выпуклая вверх функция пересекаются максимум в 2 точках.

$f(0) = 0 \quad g(0) = \lg 2 \quad \Rightarrow f(0) < g(0)$

$f(1) = 1 \quad g(1) = 2\lg 2 \quad \Rightarrow f(1) > g(1)$

$f(10) = 2 \quad g(10) = 11 \lg 2 \Rightarrow f(10) < g(10)$

Получаем 2 корня на промежутках $(0,1)$ и $(1,10)$.

Получаем $x^2 - 3 = y_1 \in (0,1)$ — 2 корня

$x^2 - 3 = y_2 \in (1,10)$ — 2 корня

В итоге получаем 4 корня.

Ответ: 4.

Чистовик.

№1. 20, 21, 22, 23, ..., 99 — 80 чисел, 160 цифр

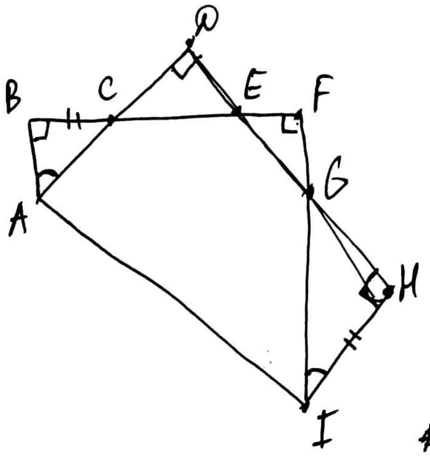
Дальше 2021 − 160 = 1861 цифра

100, 101, ... полностью поместится $\left[\frac{1861}{3}\right] = 620$ чисел

Значит, это будут числа 100, 101, ..., 719. Первая цифра следующего числа 720, т.е., 7.

Ответ: 7.

№5.



$\triangle ABC = \triangle IHG$ по катету и острому углу, $\triangle EFG = \triangle IHG$, т.к. они подобны и при этом: $\triangle CDE = \triangle GFE$ из симметрии, тогда $GI + IH + FG = GH + GE + ED = GH + GE + EF \Rightarrow HI + GI - GH = GE + EF - FG$, что в подобных треугольниках очевидно означает, что коэффициент подобия 1.

Тогда $S = S_{ABFI} + S_{CDE} + S_{GHI} = \frac{S_{квадрата}}{2} + 2S_{GHI}$ имеем прямоугольный треугольник с фиксированной суммой стороны ($\sqrt{17}$, ведь их сумма это сторона квадрата), площадь которого нужно максимизировать. Но $S = p \cdot r = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b-c}{2}\right)$, где $\frac{a+b+c}{2}$ константа. Значит, с гипотенузой должна быть минимальной, а это случай равнобедренного. Тогда

$$S_{GHI} = \frac{a^2}{2}, \quad 2a + a\sqrt{2} = \sqrt{17} \Rightarrow S = \frac{17}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{17}{2} + \frac{17}{6+4\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{17}{2} + \frac{17}{6+4\sqrt{2}}$

Чистовик.

№4. $\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3. \end{cases}$

Сделаем замену $U=2x$, $V=3y$ и получим:

$$\left.\begin{cases} U-V+\frac{6}{UV}=6, & /\cdot\frac{U-V}{6} \\ 3(z-U)+\frac{2}{U\cdot z}=2, & /\cdot\frac{z-U}{2} \\ 2(V-z)+\frac{3}{V\cdot z}=3 & /\cdot\frac{V-z}{3} \end{cases}\right) (+)$$

$$\frac{1}{6}(U-V)^2+\frac{3}{2}(z-U)^2+\frac{2}{3}(V-z)^2+\frac{U-V}{U\cdot V}+\frac{z-U}{U\cdot z}+\frac{V-z}{V\cdot z}=$$

$$=U-V+z-U+V-z$$

$$\frac{1}{6}(U-V)^2+\frac{3}{2}(z-U)^2+\frac{2}{3}(V-z)^2+\underbrace{\frac{1}{U}-\frac{1}{V}+\frac{1}{z}-\frac{1}{U}+\frac{1}{V}-\frac{1}{z}}_{=0}=0$$

$$\frac{1}{6}(U-V)^2+\frac{3}{2}(z-U)^2+\frac{2}{3}(V-z)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U=V \\ z=U \\ V=z \end{cases} \Rightarrow U=V=z$$

$$U-V+\frac{6}{U\cdot V}=6 \Rightarrow \frac{6}{z^2}=6 \Rightarrow z=\pm 1$$

$$x=\frac{U}{2}=\frac{z}{2}; \quad y=\frac{V}{3}=\frac{z}{3}$$

Получаем 2 решения $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1\right)$.

Черновик.

1. 20, 21, 22, 23, ..., 99 – 80 чисел, 160 цифр

~~Дальше~~ 2021 – 160 – 1861 цифра

100, 101, ..., ~~2023~~ полностью поместится $\left[\frac{1861}{3}\right] = 620$ чисел

Значит, это будут числа 100, 101, ... 719 Первая цифра следующего числа 720, т. е., 7.

Ответ: 7.

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

4. $x = \frac{1}{2}$:

(1) $3z - 3 + \frac{2}{z} = 2 \quad | \cdot z$

$3z^2 - \cancel{6}\, 5z + 2 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \qquad z_1 = 1 \rightarrow$ (2) $z_1 = 1$: $3 - 6x + \frac{1}{x} = 2 \quad | \cdot x$

$z_2 = \frac{2}{3}$

$x - 6x^2 + 1 = 0$

$6x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -\frac{1}{3}$

Получаем 2 решения $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

(2) $z_2 = \frac{2}{3}$: $\cancel{3} - 6x + \frac{3}{2x} = 2 \quad | \cdot 2x$

$2x - 12x^2 + 3 = 0$

$12x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 144 = 148$

$$\begin{array}{r|l} 148 & 2 \\ 74 & 2 \\ 37 & \end{array}$$

Сделаем замену $U = 2x$, $V = 3y$ и получим:

$$\begin{cases} U - V + \frac{6}{UV} = 6, & | \cdot \frac{U-V}{6} \\ 3(Z - U) + \frac{2}{U \cdot Z} = 2, & | \cdot \frac{Z-U}{2} \\ 2(V - Z) + \frac{3}{V \cdot Z} = 3 & | \cdot \frac{V-Z}{3} \end{cases} \quad (+)$$

$\frac{1}{6}(U-V)^2 + \frac{3}{2}(Z-U)^2 + \frac{2}{3}(V-Z)^2 + \frac{U-V}{UV} + \frac{Z-U}{U \cdot Z} + \frac{V-Z}{V \cdot Z} =$

$= U - V + Z - U + V - Z$

$\frac{1}{6}(U-V)^2 + \frac{3}{2}(Z-U)^2 + \frac{2}{3}(V-Z)^2 + \underbrace{\frac{1}{U} - \frac{1}{V} + \frac{1}{Z} - \frac{1}{U} + \frac{1}{V} - \frac{1}{Z}}_{=0} = 0$

$\frac{1}{6}(U-V)^2 + \frac{3}{2}(Z-U)^2 + \frac{2}{3}(V-Z)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} U = V \\ Z = U \\ V = Z \end{cases} \Rightarrow U = V = Z$

$U - V + \frac{6}{U \cdot V} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6}{Z^2} = 6 \Rightarrow Z = \pm 1$

$x = \frac{U}{2} = \frac{Z}{2}; \; y = \frac{V}{3} = \frac{Z}{3}$

4

Черновик

$f(0) = 0 \quad g(0) = \lg 2 \Rightarrow f(0) < g(0)$

$f(1) = 1 \quad g(1) = 2\lg 2 \Rightarrow f(1) > g(1)$

$f(10) = 2 \quad g(10) = 11\lg 2 \Rightarrow f(10) < g(10)$

Получаем 2 корня на промежутках $(0,1)$ и $(1,10)$.

Получаем $x^2 - 3 = y_1 \in (0,1)$ – 2 корня

$x^2 - 3 = y_2 \in (1;10)$ – 2 корня

В итоге получаем 4 корня.

4. 2. 20212223... Для чисел до 99:

$a_1 = 20$

$d = 1$

$a_n = 20 + 1\cdot(n-1) = 99 \Rightarrow n = 80$

$a_{80} = 99$

последняя цифра её номер $= 80\cdot 2 = 160$

Для чисел до 999:

$a_1 = 100$

$d = 1$

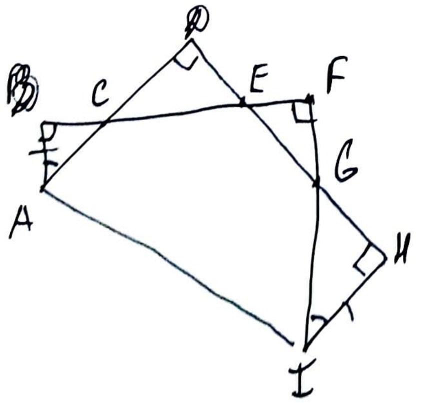
$a_n = 100 + 1\cdot(n-1) = 999 \Rightarrow n = 900$

$a_{900} = 999$

последняя цифра, её номер $= 160 + \overset{2700}{900\cdot 3} = 2860$

Номер $2021 : 3 = 6$.

№5.



Тогда $S = S_{ABFI} + S_{CDE} +$

$+ S_{GHI} = \frac{S_{квад.}}{2} + 2S_{GHI}$

Имеем прямоуг. Δ с фиксир. суммой сторон ($\sqrt{17}$, ведь их сумма это сторона квадрата), площадь которого нужно максимизировать. Но $S = p\cdot r = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$, где $\frac{a+b+c}{2} = const$ $\Rightarrow$ c (гипотенуза) должна быть минимальной, а это случай равнобедренного. Тогда $S_{GHI} = \frac{a^2}{2}$,

$2a + a\sqrt{2} = \sqrt{17} \Rightarrow S = \frac{17}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{17}{2} + \frac{17}{6+4\sqrt{2}}$

$\Delta ABC = \Delta IHG$ по катету и острому углу. $\Delta EFG = \Delta IHG$ т.к. они подобны и при этом: $\Delta CDE = \Delta BFE$ из симметрии, тогда $GI + IH + FG = GH + GE + ED =$

$= GH + GE + EF \Rightarrow HI + GI - GH =$

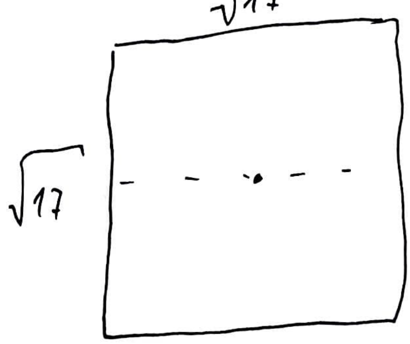
$= GE + EF - FG$, что в подобных треугольниках очевидно означает что коэф. подобия 1.

$(2+\sqrt{2})^2 = 4 + 4\sqrt{2} + 2$

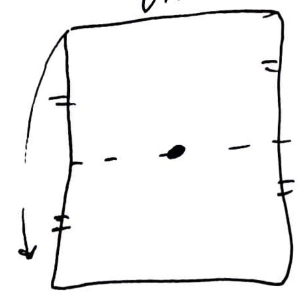
Черновик.

5. $\sqrt{17}$

$\sqrt{17}$



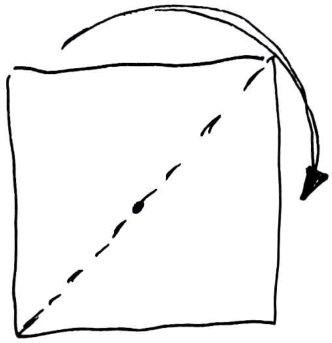
1сл.: $\sqrt{17}$



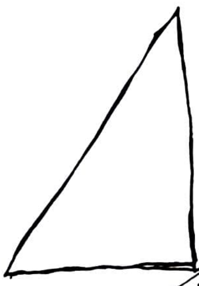
$\Rightarrow$ $\sqrt{17}$, $\frac{\sqrt{17}}{2}$

$S_1 = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \sqrt{17} = \frac{17}{2} = 8,5$

2сл.



$\Rightarrow$

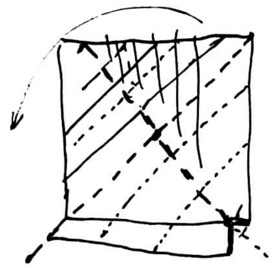


$\sqrt{17}$

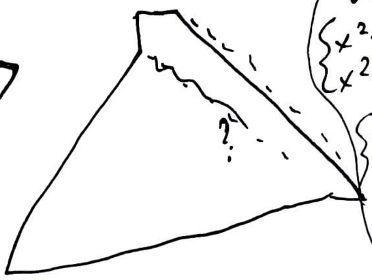
$\sqrt{17}$

$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{17}{2}$

3сл.



$\Rightarrow$



?

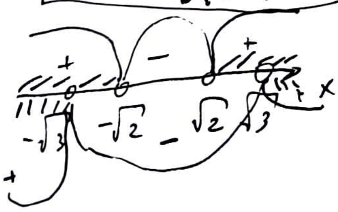
$\boxed{3}$. $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x^2-3>0 \\ x^2-2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0 \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})>0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$



4. (3):

1) $\cancel{y=2}$: $24z + 4z^2 + 1 = \cancel{-6z}$

$4z^2 + 18z + 1 = 0$

$D = 324 - 16 = \sqrt{308}$

$\ominus$?

$\times\frac{18}{18}$, $+\frac{144}{18}$, $-\frac{324}{16}$, 308

$z=1$: $6y^2 - 2y + 1 = 3y$

$6y^2 - 5y + 1 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$y = \frac{5 \pm 1}{12} = \boxed{\left\{\frac{1}{2}; \cancel{\frac{4}{12}}\ \frac{1}{3}\right\}}$

$z = \frac{2}{3}$: $4y^2 - \frac{8}{3}y + 1 = 2y$ $|\cdot 3$

$4y^2 - 8y + 3 = 6y$

$4y^2 - 14y + 3 = 0$

$D = 196 - 36 = 160 = 4\sqrt{10}$

$y = \frac{14 \pm 4\sqrt{10}}{8} = \dots$

$160 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5$

$\frac{160}{16} = \frac{10}{2} = 5$

$\times\frac{14}{14}$, $+\frac{56}{14}$, 196, -36, 160

$\lg 2^3 = \lg 8$

$x^2 - 3 = 2$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

6

Черновик.

$$\begin{cases} -6xy + 2x^2y - 3y^2x + 1 = 0, & (1) \\ -6x^2z - 2xz + 3z^2x + 1 = 0, & (2) \\ 6y^2z - 2z^2y - 3yz + 1 = 0; & (3) \end{cases}$$

$(3)-(1):\ 6y^2z + 6xy - 2z^2y - 2x^2y - 3yz + 3y^2x = 0$

$6y(yz + x) - 2y(z^2 + x^2) - 3y(z - yx) = 0$

$(2)-(1):\ -6x^2z + 6xy - 2xz - 2x^2y + 3z^2x + 3y^2x = 0$

$-6x(xz - y) - 2x(z + xy) + 3x(z^2 + y^2) = 0$

$(3)-(2):\ 6y^2z + 6x^2z - 2z^2y + 2xz - 3yz - 3z^2x = 0$

$6z(y^2 + x^2) - 2z(zy - x) - 3z(y + zx) = 0$

~~$((3)-(2)-(2)-(1))\ 6z(y^2+x^2) + 6x(xz-y) - 2z(zy-x) + 2x(z+xy) - 3z(y+zx) - 3x(z^2+y^2) = 0$~~

2. Т.к. при фиксированном a всегда есть решение, то подставим в качестве параметра b -1, тогда

$|x| - \arcsin(x) - (\arccos(x) + |x| - 1) + a = -\arccos(x) - \arcsin(x) + 1 + a =$

$= -\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0,$

Значит, что $a = \frac{\pi}{2} - 1$, но нужно проверить, что при таком a всегда есть корень при любом b. Действительно, $x = 1$ - решение:

$1 - \arcsin(1) + b(\arccos(1) + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 1 - \arcsin(1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$. ч.т.д.

Ответ: $\boxed{a = \frac{\pi}{2} - 1}$.

3. $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$

Сделаем замену $y = x^2 - 3$

$2^{\lg y} = \lg 2^{y+1}$

$y^{\lg 2} = (y+1)\lg 2$

$f(y) = y^{\lg 2}$ - степенная функция

$g(y) = (y+1)\lg 2$ - прямая

$f''(y) = \lg 2(\lg 2 - 1)y^{\lg 2 - 2} < 0 \Rightarrow f$ - вып. вверх

Прямая и выпуклая вверх функция пересекаются максим. в 2 точках

7

Черновик.

$980 \cdot 3 = 326 \cdot 3$ (+2

1. $\underbrace{20}21 22 23$

$\frac{2020}{2} = 1010$

$a_1 = 20$

$d = 1$

$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

$a_{2021} = 20 + 1 \cdot 2020 = 2040$

Ответ: 2040

$a_1 = 20$

$d = 1$

$a_{1010} = \cancel{20 + 1 \cdot 1009 = 1029}$

$a_n = 20 + n - 1 = 99$

$n = 80$

№ $= 160$

$a_{80} = 99$

№ $= 159$

2. $|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Все a, при которых $\forall b$ имеет хотя бы 1 решение

~~$\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~

$|x| - \arcsin x + b \cdot \arccos x + b \cdot |x| - b + a = 0$

$x = 0$: $\cancel{b} - b + a = 0$

$a = 0$ – подходит.

$|x| - \arcsin x + b \cdot \arccos x + bx - b + a = 0$

$x - \arcsin x + b \cdot \arccos x +$

$20 + n - 1 = 999$

$n = 980$ $900 \cdot 3 = 2700$

$a_{980} = 999$

$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$ $1861 : 3 = 620$

326 2700

$2021 - 80$

$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 80 \end{array}$

$1941 : 3 = 647$

$a_{647} = 20 + 646 =$

$= 666$

$1861 : 3 =$

№ $2021 = 620 \cdot 3 + 1$

1. $20212223\ldots$

$a_1 = 20$

$d = 1$

$a_1 = 100$

$d = 1$

$a_n = 100 + n - 1 = 999$

$n = 900$ $a_{900} = 999$

$\frac{900}{2700}$

$a_n = 20 + n - 1 = 99$

$n = 80$

$a_{80} = 99$

180 номер

$\begin{array}{r} 1860 \\ +\ 160 \\ \hline 2020 \end{array}$

2021 номер

2700 номер

$2021 - 180 = 620 \cdot 3 + 1$

$a_{630} = 100 + 629 = 729$ 730

2020 номер

$\boxed{x = \frac{1}{2};\ y = -2;}$ $z =$

$\boxed{x, y, z \neq 0}$

4. $\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6, & / \cdot xy \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2, & / \cdot xz \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3. & / y \cdot z \end{cases}$

$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6$

$3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2$

$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-2)$

$6y - 2z$

$1 + 6 - \frac{2}{2}$

Ответ: 7

$a_{81} = 100$ $a_{620} = 100 + 619 = 719$ 720

Ответ: 8

$(1) - (2)$:

$2x^2y + 6x^2z - 3y^2x - 3z^2x = 6xy - 2xz$

$2x^2(y+z) - 3x(y^2 - z^2) = 2x(3y - z)$

$2x^2(y+z) - 3x(y-z)(y+z) - 2x(3y - z) = 0$

(1) $2x^2y - 3y^2x + 1 = 6xy$

(2) $3z^2x - 6x^2z + 1 = 2xz$

(3) $6y^2z - 2z^2y + 1 = 3yz$

(1) $2 \cdot \frac{1}{2} + 6 - \frac{z^2}{z} = 6$

$3z - 3 + \frac{2}{z} = 2$ $/ \cdot z$

$3z^2 - 5z + 2 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$z = \frac{5 \pm 1}{6}$

$\boxed{z = 1; \frac{2}{3}}$

$(y+z)\cancel{(2x^2 - 3x(y-z) - 2x(3y-z))} = 0$

$(y+z)(2x^2 - 3xy + 3xz - 2x(3y - z)) = 0$

$(y+z)(2x^2 -$

(8)