МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Хорунжий Александр Андреевич**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Хорунжий Александр Андреевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	95 баллов

Чистовик №1

№1

Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну строчку: 20212223... Какая цифра стоит на 2021-ом месте в получившейся последовательности?

Решение:

Цифры с 20 по 99 занимают в последовательности первые 160 мест $(2\cdot 80)$. Остается 1861 место $(2021-160)$. Числа от 100 до 719 занимают последующие 1860 мест $((719-99)\cdot 3)$. Значит на 2021-ом месте будет стоять первая цифра числа 720, а это 7.

Ответ: 7

№2

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Выберем какое-нибудь значение b так, чтобы выражение упростилось. Так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, возьмём $b=-1$, тогда выражение примет вид:

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$, также заметим, что при $x \in [-1;1]$ это выражение равносильно $1 + a - \frac{\pi}{2} = 0$.

То есть, при $b=-1$ существует решение только при $a = \frac{\pi}{2} - 1$. Это значит, что единственное значение a, которое может оказаться в ответе — это $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Осталось проверить будет ли уравнение иметь решение для любого b при $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Заметим, что при $x = 1$ и $a = \frac{\pi}{2} - 1$, уравнение превращается в такое, что верно любое b и имеет корень $x=1$, при любом b.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Чистовик № 2

№ 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6, \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2, \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3. \end{cases}$$

1. Введём ~~z~~ параметр $c = \frac{1}{xyz}$, тогда получим равносильную систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} 2x - 3y + cz &= 6 \\ 3z - 6x + cy &= 2 \\ 6y - 2z + cx &= 3 \end{aligned}\right. \left| \begin{matrix} 3 \; \oplus \\ 1, c \\ 6 \; \oplus \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} (c-9)y + (3c+3)z &= 20 \\ (3c-12)z + (36+c^2)y &= 2c+18 \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} (c-9)y + (3c+3)z = 20 \\ (36+c^2)y + (3c-12)z = 2c+18 \end{cases} \left| \begin{matrix} (c-4) \\ (c+1) \end{matrix} \ominus \right. \left| \begin{matrix} c^2+36 \\ c-9 \end{matrix} \ominus \right.$$

$$\begin{cases} [(c-9)(c-4) - (36+c^2)(c+1)]\, y = 20(c-4) - 2(c+9)(c+1) \\ [3(c+1)(c^2+36) - 3(c-4)(c-9)]\, z = 20(c^2+36) - 2(c+9)(c-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [c^2 - 13c + 36 - c^2 - c^3 - 36c - 36]\, y = 20c - 80 - 2c^2 - 20c - 18 \\ 3[c^3 + c^2 + 36c + 36 - c^2 + 13c - 36]\, z = 20c^2 + 720 - 2c^2 + 162 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c^3 + 49c)y = 2c^2 + 98 \\ 3(c^3 + 49c)z = 18c^2 + 882 \end{cases}, \quad \begin{cases} cy = 2 \\ cz = 6 \end{cases}, \Rightarrow \quad y = \frac{2}{c}, \quad z = \frac{6}{c}$$

№ 3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

~~$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$ (по формуле $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$)~~

$x^2 - 3 = t$, $\lg 2 = \alpha$

~~$t^\alpha = (t+1)\alpha$, где $\alpha < 1$~~

$(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} \to 0$. Это значит, что $t \to \infty$

Чистовик №3

№4 (продолжение)

Подставим в первое уравнение

$2x-3y+cz=6$

$2x-\frac{6}{c}+\underset{\sim}{6}=\underset{\sim}{6}$

$x=\frac{3}{c}$; Вернёмся к обозначениям:

$c=\frac{1}{xyz}$

$c=\frac{1}{\frac{3}{c}\cdot\frac{2}{c}\cdot\frac{6}{c}}$; $c=\frac{1}{\frac{36}{c^3}}$; $c=\frac{c^3}{36}$; $c^2=36$; $c=6$ либо $c=-6$

Получаем две тройки решений:

$c=6$	$c=-6$
$x=\frac{1}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$
$y=\frac{1}{3}$	$y=-\frac{1}{3}$
$z=1$	$z=-1$

Ответ: $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=1$;
$x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3}, z=-1$.

№3

$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}$

$(x^2-3)^{\lg 2}=(x^2-2)\lg 2$ (по формуле $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$)

Пусть $x^2-3=t$, $\lg 2=\alpha$

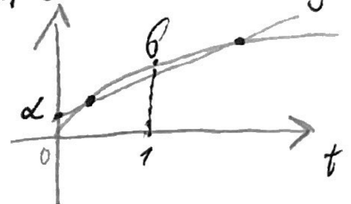
$t^\alpha=(t+1)\alpha$, где $\alpha<1$

$(t^\alpha)'=\alpha t^{\alpha-1}=\frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}\to 0$. Это значит, что $t\to\infty$

График функции t^α - выпуклый вверх и производная уменьшается монотонно.

$f(t)=t^\alpha$; $g(t)=\alpha(t+1)$
$f(0)=0$; $g(0)=\alpha$, $\Rightarrow$ $f(0)<g(0)$
$f(1)=1$; $g(1)=2\alpha$

$f(1)>g(1)$, так как $1>2\lg 2$, $\Rightarrow \frac{1}{2}>\lg 2$, $\Rightarrow \sqrt{10}>2$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow 10>4$ - верно

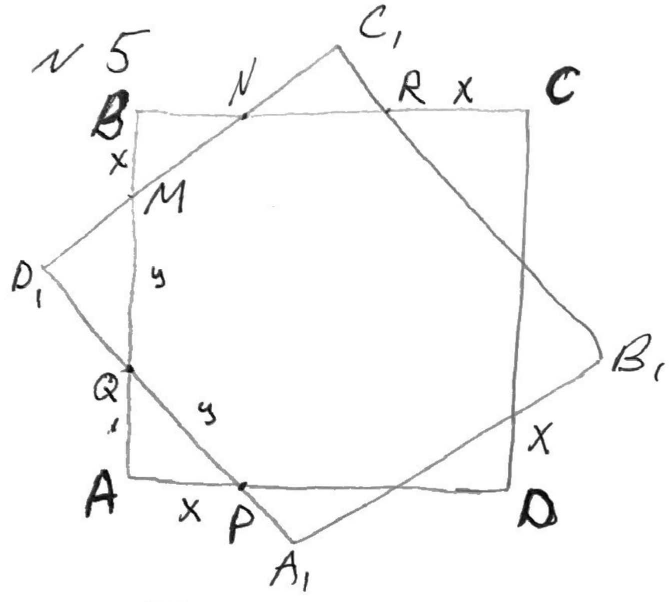


Две точки пересечения $x^2=3+t$

Ответ: 4 корня

~~1~~ Чистовик № 4

№ 5



Дано: квадрат;

$S_{\square} = 17$

Найти: $S_{фиг.}$ — ? (макс.)

Решение:

1. Пусть a — сторона квадрата. Обозначим отрезок $AP = x$, тогда же $CR = x$. Заметим, что $x < \frac{a}{2}$

2. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 симметричны относительно вершин квадрата $ABCD$ соответственно. Относительно прямой PR из симметрии следует, что прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R_1, QD_1M равны.

3. Получившаяся фигура $\Phi = PAQD_1MBNC_1R$. PD_1C_1R ~~…~~ ∨ MBN

Её S равна сумме площадей прямоугольной трапеции ~~…~~ и двух равных прямоугольных треугольников AQP и ~~…~~

Так как $A_1P_1 = a$, то $D_1P = a - x$. Тогда площадь трапеции равна $S_{тр.} = \frac{x + (a-x)}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$. Значит S фигуры Φ будет максимальной, если максимальной будет $S_{\triangle AQP}$

$S_{\Phi} = S_{тр.} + 2 \cdot S_{\triangle AQP}$

4. Треугольники D_1MQ и QAP равны.

Обозначим $MQ = QP = y$

По теореме Пифагора:

$(a - x - y)^2 + x^2 = y^2$ (1)

и теперь нужно найти максимум Φ-и ($S_{треугол.}$)

$S_{\triangle} = \frac{(a - x - y)x}{2}$ (2)

Сделаем выкладки:

$(a-x)^2 - 2(a-x)y + y^2 + x^2 = y^2, \Rightarrow y = \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)}$.

Подставим в (2)

Чистовик №5

№5 (продолжение)

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left(a - x - \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)}\right)\cdot x \qquad (3)$$

Упростим:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(a-x)^2 - (a-x)^2 - x^2}{2(a-x)}\cdot x, \Rightarrow$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a-x)^2 - x^2}{2(a-x)}\cdot x, \Rightarrow$$

$$S_\Delta = \frac{a}{2}\cdot\frac{(a-2x)x}{2(a-x)}, \Rightarrow$$

$$S_\Delta = \frac{a}{4}\cdot\frac{ax - 2x^2}{a-x}$$

Возьмём производную

$$S'_\Delta = \frac{a}{2}\cdot\frac{(a-4x)(a-x) + (ax-2x^2)}{(a-x)^2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a^2 - 5ax + 4x^2 + ax - 2x^2}{(a-x)^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{2x^2 - 4ax + a^2}{(a-x)^2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2(x^2 - 2ax + a^2)}{(a-x)^2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2(x-a)^2 - a^2}{(a-x)^2} = 0$$

$$x - a = \frac{a}{\sqrt{2}};\quad x - a = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \Rightarrow \quad x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

$$x = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$$

S': $+$ $\quad a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\quad$ $-$ $\quad a\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\quad$ $+$ $\quad x$

S: $\nearrow$ $\quad a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\quad$ $\searrow$ $\quad a\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\quad$ $\nearrow$

$\Rightarrow a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ – точка максимума

Тогда получим максимальные значения площади

$$S_\Delta = \frac{a}{2}\cdot\frac{\left(a - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}a\right)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{2\left(a - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a\right)} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{(a - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{\sqrt{2}(\sqrt{2}a - \sqrt{2}a + a)} = \frac{a}{2}\cdot\frac{(a - 2a + \sqrt{2}a)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)a}{\sqrt{2}a} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)^2 a^2}{2a};\qquad S_\Delta = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$$

Чистовик №6

№5 (продолжение)

Значит искомая площадь равна:

$$S = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{a^2}{2}(1+3-2\sqrt{2})$$

Ответ: $S = a^2(2-\sqrt{2})$