МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Иванов Павел Алексеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Иванов Павел Алексеевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	95 баллов

Черновик. 11.15 12.12 14:15

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$ 1.0

$2x - y = \frac{1}{xy} = 6;$ 11:45 11:15

$\Downarrow$

$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

$6xy = 1$ $\begin{cases} a = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$(x^2-2)\lg 2 = 2^{\lg(x^2-3)}$ 620·3

1860 + 160

$(x^2-\cancel{2})\lg 2 = (x^2-3)^{\lg 2}$ 2026

20212 $a = \frac{\pi}{2} - 1$

$\sqrt{2}$ $(x^2-2)\lg 2 = 2^{\lg(x^2-3)}$

4

$a = 0;$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0;$ $x = 0;$

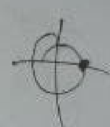
$|x| = \arcsin x - a$ $(x^2-2)\lg 2 - 2^{\lg(x^2-3)} = 0;$

$\underset{f(x)}{\shortparallel}$ $a = 0;$

11.

$\boxed{a = \arcsin x - |x|}$

$\sqrt{3}$

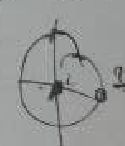


$(1+x)\lg 2 = 2$

$\arccos x + |x| - 1 = 0;$ $f'(x) = 2\lg x - 2^{\lg(x^2-3)} \cdot \ln 2 \left(\frac{2x}{\ln(x^2-3)}\right)$

$|x| - \arcsin x = -b(\arccos x + |x| - 1)$

$\underbrace{\arccos x}_{\max = 1} + |x| = 1 - |x|$



$x = 0;$

$0 -$

$\min = 1$

$\overset{\shortparallel}{x = 0}$

1 2 3 4 5 6 7 8

20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

$\frac{\pi}{2} - 1 + |x| - \arcsin x = -b(\arccos \dots)$

$a + |x| - \arcsin x = -b(\arccos x + |x| - 1) = 0$ $x = 1$

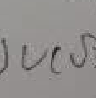
$\sqrt{3}$ $a = \arcsin$

$b = 0$ $a =$

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$ $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

$|x| = \arcsin x$

$(x^2-3)^{\lg 2} = \lg_2^{(x^2-2)}$



$a = \frac{\pi}{2} - 1$

$\arccos x = 1 - |x|$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-3)^{\log_{(x^2-3)} \lg 2^{(x^2-2)}}$

$a = 0;$

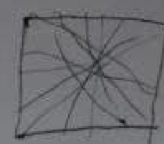
b

$\Downarrow$

$\lg 2 = \log_{(x^2-3)}(\lg 2) \cdot (x^2-2)$

10

Черновик.



$-_{10}^{10}$

$\frac{3y}{x} - \frac{2x}{y}$ $(\frac{1}{10^{10}}+1)$ $\lg_2$ -2^{-10}

$\Delta\alpha\beta$

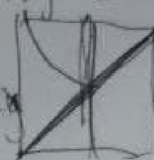
$\frac{1}{xy} = \frac{A}{x} + \frac{B}{y}$ $\lg 2^{\frac{1}{10^{10}}+1}$ $-\lg$ $3y-2xy$

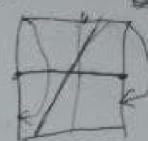
$Ax+By=1$ -2

x

$\frac{Ax+By}{xy}$ $B=-2y$

α β





$\alpha - \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 1$

$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{1}{6xy} = 1$

$\frac{3}{2}z - 3x + \frac{1}{2xz} = 1$ y 40 $x \cdot y\, z$ $= \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = 1$

$2y - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3yz} = 1$

$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + 1 = \alpha\beta;$

α

$\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \alpha\beta + 1 = 0;$

$-\frac{8}{3}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6xy} + \frac{1}{2xz} + \frac{1}{3yz} = 3;$

$\frac{2xy}{y} - \frac{3xy}{}$ 1 $-\frac{1}{6xy}$ $2x - 3y + \frac{1}{6xy} = 6 \cdot \alpha\beta c$ $\alpha + \beta - \alpha\beta$

53

$2x - 3y - 6xy + \frac{1}{6xy}$ $\alpha^2\beta - \alpha(\beta^2+\beta) + 1 = 0;$

$1 \quad 0 \quad 1 \quad -2$ $\alpha = 2x$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$ $\frac{1}{2x} - \frac{1}{3y}$ $3y = \beta$ $D = \beta^4 + 2\beta^3 + \beta^2 - 4\beta$

$(t-1)(t^2+t+2) - t^2.$ $\frac{3y-2x}{6xy}$ $\alpha - \beta + \frac{6}{\alpha\beta} = 6\beta(\beta^3+2\beta^2+\beta-4)$

$\alpha - \beta = 6(1 - \frac{1}{\alpha\beta})$ $8 \cdot 4 \cdot 8$ $\beta(\beta^2+1)^2 - 4$

$t^3 + t - 2 = 0;$ $\sqrt{\beta^3} \cdot (\beta+1) = 2$ $64 + 32 - 4 - 4.$

$t = 1$

$\sqrt{\beta}(\beta+1) = 2;$ $\sqrt{\beta^3}(\beta+1$

11

Чистовик

Вариант 2

№1

В получившейся последовательности будет 80 двузначных чисел (с 20 по 99) в них будет $80 \cdot 2 = 160$ цифр. В числах с 100 по 719 будет 620 ~~цифр~~ трехзначных ~~цифр~~ чисел т.е $620 \cdot 3 = 1860$ цифр

т.е $1860 + 160 = 2020$ цифр было до числа 720;

т.е на 2021 месте будет находиться цифра 7.

Ответ: 7.

№2

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0,$

Если уравнение имеет корни при любом, то оно должно иметь решения и для $b = -1$;

Подставим $b = -1$

$\Downarrow$

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0,$

$\Downarrow$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

Значит, только при заданном значении a уравнение будет иметь решение для $b = -1$;

Докажем, что при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение будет иметь корни при любом ~~в~~ b.

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0,$

Заметим, что ~~при~~ ~~$x=1$~~ при любом b уравнение имеет корень $x=1$

Прод. на след. месте.

1/...

Чистовик.

Значит, эта функция имеет одну точку экстремума, следовательно, уравнение (1) будет иметь не более двух корней, т.к функция имеет всего 2 промежутка монотонности

Заметим, что $g(0) = (10^0+1)\lg 2 - 2^0 = 2\lg 2 - 1 = \lg 4 - \lg 10 < 0$; т.е $g(0) < 0$;

$g(1) = (10^1+1)\lg 2 - 2^{1} = 11\lg 2 - 2 = \lg 2^{11} - \lg 100 > 0$; т.е $g(1) > 0$;

Значит в промежутке $[0;1]$ ф-я меняет знак, т.к имеет хотя бы один корень

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = \lim_{t \to -\infty} ((10^t+1)\lg 2 - 2^t) = \lg 2 > 0;$$

Значит в промежутке $[-\infty; 0]$ ф-ция тоже меняет знак т.е имеет корень ~~.......~~

И т.к мы доказали, что корней не более 2-ух, значит их 2. И если уравнение (1) имеет 2 корня, то при обратной замене для каждого из этих значений будет по 2 значения x, т.е всего решений 4

Ответ: 4.

3/7

Чистовик

$1 - \arcsin 1 + b(\arccos 1 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 =$

$= 1 - \frac{\pi}{2} + b \cdot (0 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0;$

Значит, $a = \frac{\pi}{2} - 1$ - удовлетв. условию и при этом единственно, т.к при $b = -1$ это ~~будет~~ будет един значен a, при котором оно будет иметь корни.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

№3

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$

ОДЗ: $x^2 - 3 > 0 \iff x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

$\exists\ x^2 - 3 = 10^t$; причем $t \in R$ т.к $10^t > 0$;

Заметим, что каждое значение t будет достигаться при двух значениях x в силу ~~[illegible]~~ четности функции $f(x) = x^2 - 3$

Рассмотрим $g(t) = (10^t + 1)\lg 2 - 2^t$ (1) $(10^t + 1)\lg 2 - 2^t = 0$

$g'(t) = 10^t \cdot \ln 10 \cdot \lg 2 - 2^t \ln 2 = 10^t \cdot \ln 10 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 10} - 2^t \cdot \ln 2 =$

$= 10^t \cdot \ln 2 - 2^t \cdot \ln 2$

$10^t \ln 2 - 2^t \cdot \ln 2 = 0$

$\Updownarrow$

$2^t \ln 2(5^t - 1) = 0;$

т.к $2^t \cdot \ln 2 \neq 0 \Updownarrow$

$5^t = 1 \iff t = 0$; Продолжение на след листе

2/~~14~~

м. 0

Черновик.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 & a \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -3a^2 - 147;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & a \\ -6 & 2 & 3 \\ a & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2a^2 - 98$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -6 & a & 2 \\ a & 6 & 3 \end{vmatrix} = -6a^2 - 294$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3(a^2+49)}{-a(a^2+49)} = \frac{3}{a};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2(a^2+49)}{-a(a^2+49)} = \frac{2}{a};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6(a^2+49)}{-a(a^2+49)} = \frac{6}{a};$$

т.е. $x = 3t;\ y = 2t;\ z = 6t;$

$xyz = 36t^3;$

$t = 36t^3$ т.к. $t \neq 0$, то $t = \pm\frac{1}{6}$; $\left(t^2 = \frac{1}{36}\right)$

если $t = \frac{1}{6}$ то $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

если $t = -\frac{1}{6}$ то $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 \end{cases}$

Ответ:
$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right)$
$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1\right)$

5

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

П-ть $xyz=t$; тогда

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{z}{t}=6; \\ 3t-6x+\frac{y}{t}=2 \\ 6y-2z+\frac{x}{t}=3; \end{cases}$$

Возьмем t за ~~параметр~~ параметр и представим в виде системы лин. ~~ур.~~ уравнений; где $a=\frac{1}{t}$; причем $a\neq 0$;

$$\begin{cases} 2x-3y+az=6 \\ -6x+ay+3z=2; \\ ax+6y-2z=3 \end{cases}$$

Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & 6 \\ -6 & a & 3 & 2 \\ a & 6 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

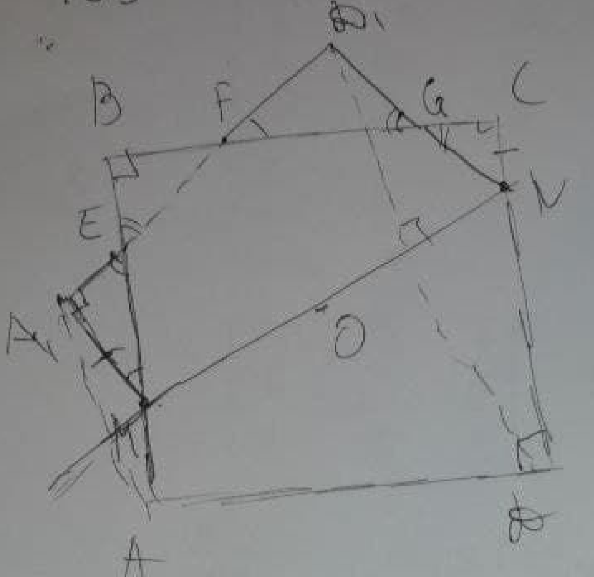
$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & a \\ -6 & a & 3 \\ a & 6 & -2 \end{vmatrix}=-a^3-49a=-a(a^2+49)\neq 0$$

т.к. $a\neq 0$;

4

Чистовик

№5



Пусть сторона квадрата — a

Изобразим точки симметричные $A - A_1$ и $D - D_1$ относительно прямой MN; тогда $MA_1 = CN = AM$ в силу симметрии, $DN = BM = D_1N$;

Заметим, что прямоуг. трапеция $S_{MA_1D_1N} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} A_1D_1 \cdot (D_1N + A_1M) = \frac{1}{2} a^2$;

Получаем, что сумма площадей внешних треугольников — A_1ME; FD_1G равна сумме площадей $\triangle BEF$ и $\triangle CGN$ (внутренние)

Эти треугольники являются подобными, то т.к. $\triangle CGN = \triangle A_1ME$, то $\triangle BEF = \triangle D_1FG$

В силу симметрии треугольники равны

$GF = ME = EF = NG$;

Прод. на след. листе.

6/14

~~Треуг всех~~ Чистовик.

Среди всех треугольников с гипотенузой, которая определенна максимальную площадь будет иметь р/б-ый *

$\exists$ $BE = x$; тогда $AM = x$; $ME = \sqrt{2}x$;

$x + x\sqrt{2} + x = a$;

$\Downarrow$

$$x = \frac{a}{2+\sqrt{2}};$$

искомая $\Downarrow$

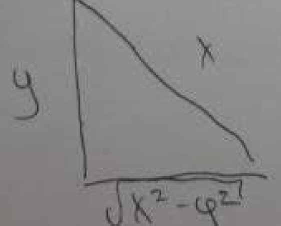
$$S = \frac{1}{2}a^2 + x^2 = \frac{1}{2}a^2 + \left(\frac{a}{2+\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 17\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6+2\sqrt{2}}\right)$$

$\Downarrow$

Ответ: $S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6+2\sqrt{2}}\right)17. = \frac{4+\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})} \cdot 17.$

* ~~Докажем~~ это:



$$S = \frac{1}{2}y \cdot \sqrt{x^2-y^2} = f(y)$$

$$f'(y) = \sqrt{-y^2+x^2} - \frac{y^2}{\sqrt{-y^2+x^2}}$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{-y^2+x^2} = \frac{y^2}{\sqrt{-y^2+x^2}}$$

$\Downarrow$

$x^2 = 2y^2 \iff x = \pm\sqrt{2}y$ – точки

$x = \sqrt{2}y$ точка максимума ч.т.д.

7

«Черновик».

8 $\frac{1}{2} y^2 \cdot \sqrt{-y^2+x^2}$

$\frac{1}{2}\ y\ \sqrt{-y^2-x^2} - \frac{y \cdot 2y}{2\sqrt{-y^2+x^2}}$

$\Downarrow$

$-2y^2$.

$2(-y^2+x^2) = 2y^2$,

$\sqrt{2}$

$x =$

$4y^2 = x^2$.

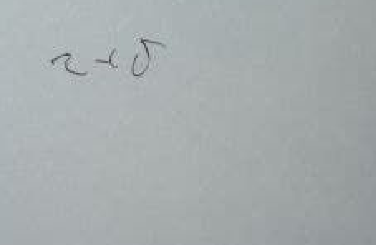
$\frac{1}{2(3+\sqrt{2})} + \frac{1}{2}$

$2+\sqrt{}$

$2(3+2\sqrt{2})$

$2($

$\frac{3+\sqrt{2}+1}{2(3+\sqrt{2})}$ $4+\sqrt{2}$



8

Черновик.

xy 12:45

12:15

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

$x=\frac{3}{2}$

$y=\frac{2}{3}$

$\frac{2x^2y-3xy^2+1}{xy}=6;$

$x=\frac{1}{2};\ x=-\frac{1}{2}$ $2x-3y+\frac{1}{xy}=6;$

$y=\frac{1}{3}$ $y=-\frac{1}{3}$

$z=1$ $z=-1$ $2x+\frac{1}{xy}-3y=6;$

$2x^2y-3xy^2=6xy-1$

$3z^2x-6x^2z+1=2xz-1$

$x=\frac{3y}{2}$ $3y+\frac{2}{3y^2}-3y=6;$

$\cancel{2x^2y+1=3xy(2+y)}$

$-\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{3}$ $3y^2=\frac{1}{3}$

$2x^2y$ $3xy^2+2y(3x-2x^2)-1=0;$

$2x+\frac{1}{xy}-3y$

$\frac{2x}{z}-\frac{3y}{z}+\frac{1}{xyz}=\frac{6}{z}$ $\frac{D}{4}=(3x-2x^2)^2+3x$ $3xy^2+6xy=2x^2y+1$

$x^2(\ -2$

$\frac{6y}{x}-\frac{2z}{x}+\frac{1}{xyz}=\frac{3}{x}$ $x^2(3-2x)^2+3x$ $3x(y^2+2y)=2x^2y+1$

$\left(\frac{1}{xy}\right)'=(xy)^{-1}=-(xy)^{-2}$

$\cancel{2x^2y-3xy^2}=6;$

$x(x(3-2x)^2+3x)$ $3x=\frac{2x^2y+1}{y^2+2y}$

$2x^2y-3xy^2-3z^2x+6x^2z=6xy-1-2xz+1$

$2-\frac{1}{x^2y}$

$=\frac{y}{x^2y}=-\frac{1}{x^2y}$

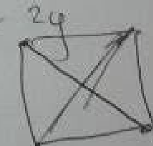
$(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1)$

$2xy-3y^2-3z^2+6xz=6y-2z;$

$2y-\frac{1}{x^2}<0;$ $1-\frac{1}{x^2y}<0$

$y(2x-3y)=3z($

$\frac{1}{x^2}+2y$



$x=$

$x^2y-1<0$

$2x-3y+\frac{1}{xy}-(3z-6x+\frac{1}{xy})(6y-2z+\frac{1}{yz})=0;$

$x^2<\frac{1}{y}$

$x=\pm\frac{1}{y}$

$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{(x^2-2)}$

$36{:}3$ $x\in($

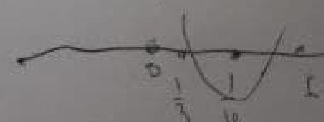
$10x=148$

$2^{\lg(x^2-3)}-\lg 2^{(x^2-2)}=0;$

$2\lg x-2^{\lg(x^2-3)}\ln 2$

$\lg$

$f(x)$ $x\in\{2\}$ $x\in\sqrt{13}$



$2^{\lg 10}$

$f'(x)=$ $1-2\lg 2\geq 0;$ $2-2\lg 2^{11}<0;$

$2^x=2^x\ln 2$ $\lg 2<\frac{1}{2}$

$-\frac{9}{3}$

$22\lg 2<2$

$\frac{2}{3}$ $>\frac{8}{3}$

$f'(x)=2^{\lg(x^2-3)}\ln 2\cdot\frac{2}{\ln 2(x^2-3)}$

$\lg 4<1$

$\lg 2^{22}<\lg 10^2$

12

$3z=$

$\alpha=2x$

$\beta=3y$

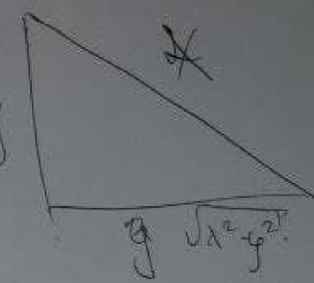
Черновик.

$\alpha-\beta+\frac{6}{\alpha\beta}=6;$

$2x^2y-3xy^2+1=6xy$

$3xz^2-6x^2z+1=2xz.$

$6y^2z-2yz^2+1=3yz.$



$\frac{1}{2}y\cdot\sqrt{x^2-y^2}$

$\cancel{3xz^2})$

$$\frac{(3xz^2-6x^2z+1)(6y^2z-2yz^2+1)}{2x^2y-3xy^2+1}=\frac{6xyz^2}{6xy}$$

$$z^2\cdot\frac{(6y^2-2yz+\frac{1}{z})(3xz-6x^2+\frac{1}{z})}{(2x^2y-3xy^2+1)z^2}=1$$

$$2x^2z^2y-3y^2z^2x+z^2=18xy^2z^3$$

$$(2y(3y-z)+\frac{1}{z})(3x(z-2x)$$

$(\pm\frac{1}{2}\quad z=\frac{1}{3}\quad z=1)$

$x=\frac{3}{2}y$

$x=2z,$

$z?$

$y=3z,$

$16z$

9

Чистовик.

Вариант 2

№1

В получившейся последовательности будет 80 двузначных чисел (с 20 по 99) в них будет $80 \cdot 2 = 160$ цифр. В числах с 100 по 719 будет 620 ~~цифр~~ трехзначных ~~цифр~~ чисел т.е $620 \cdot 3 = 1860$ цифр т.е $1860 + 160 = 2020$ цифр было до числа 720; т.е на 2021 месте будет находиться цифра 7.

Ответ: 7.

№2

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0,$

Если уравнение имеет корни при любом; то оно должно иметь решение и для $b = -1$;

Подставим $b = -1$

$\Downarrow$

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0,$

$\Downarrow$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

Значит, только при заданном значении a уравнение будет иметь решение для $b = -1$;

Докажем, что при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение будет иметь корни при любом ~~в~~ b.

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0,$

Заметим, что ~~при~~ ~~$x=1$~~ при любом b уравнение имеет корень $x = 1$

Прод. на след. листе.

1/2