МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Егорова Мария Сергеевна**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Егорова Мария Сергеевна

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	10 баллов	5 баллов	75 баллов

Чистовик

№1. Рассмотрим ряд, начиная с двузн. чисел:

1) от 20 до 99 лежит 80 чисел, т.е. 160 цифор

2) от 100 до 999 лежит 900 чисел, т.е. 2700 цифор

Их больше в условии => искомая цифра входит в 3-зн. число.

$2021-160=1861$ цифор для 3-зн.

$1861=620\cdot 3+1$ => искомая цифра явл. первой цифрой 3-зн. числа, идущего 621-ым.

$99+620=\underline{7}19$ - вот это число. Ответ: 7

B-2

1

Чистовик

№2 $|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Подставим $b = -1$. Получим уравнение:

$\cancel{|x|} - \arcsin x - \arccos x - \cancel{|x|} + 1 + a = 0$

$a = \arccos x + \arcsin x - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

Знаит, если мы хотим, что при $\forall b$ было решение, необходимо $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Теперь при любых b в точке $x = 1$ $\arccos x + |x| - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$, а $|x| - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ при $a = \frac{\pi}{2} - 1$. т. $x = 1$ – корень ур-я при $\forall b$.

Знаит, такое a действительно подходит.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Чистовик

№3

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$ Пусть $t = x^2-3$

$\Downarrow$

$2^{\lg(x^2-3)} = 2^{\lg t} = \lg 2^{t+1}$, $t \geq 0$ т.к. $\exists \lg t$

$\lg t = \frac{\log_2 t}{\log_2 10} \Rightarrow \lg t = t^{\frac{1}{\log_2 10}} = t^{\lg 2}$ – выпуклая вверх

ф-ция на $[0; +\infty)$,

$\lg 2^{t+1} = \underline{(t+1)\lg 2}$

т.к $0 < \lg 2$, но $\lg 2 < 1$

$0^{\lg 2} < 1 \lg 2$

т.к. $(t+1)\lg 2$ – прямая, а

$1^{\lg 2} > 2 \lg 2 \Rightarrow$ $t^{\lg 2}$ – выпуклая вверх, то

$10^{\lg 2} < 11 \lg 2$ будет 2 корня $t_1, t_2 > 0$

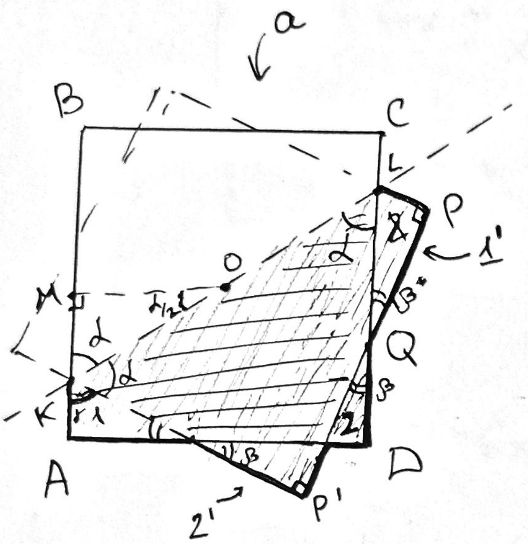
$x^2 - 2 = t_1$ – два разных решения $(x = \pm\sqrt{2+t_1})$

$x^2 - 2 = t_2$ – два разных решения $(x = \pm\sqrt{2+t_2})$

Ответ: 4 корня

Чистовик

№5 Площадь итоговой фигуры = площадь части наложения ($S_{ч.н}$) + площадь части без наложения, при этом



$2 \cdot S_{ч.н.} + S_{ч.б.н.}$ – площадь всего квадрата, const.

$\Downarrow$

S итоговой фигуры равна $S_{квадрата} - S_{\text{~~площадь~~ наложения}}$

Из этого следует, что нужно найти минимум S наложения.

$$S_{налож} = \frac{S_{кв}}{2} - S_1 - S_2,$$

где $S_{кв}$ – площадь квадрата, S_1 и S_2 – площади прямоуг Δ

a – сторона квадрата,

α – угол разреза (см. рис.)

Заметим, что $\Delta_{1'} = \Delta_1$, т.к. $LP = AK$ и

$\angle DLP = \angle KLP - \alpha = \angle AKL - \alpha = \angle AKP' = \angle KLD - \alpha$

Тогда нужно максимизировать $S_{1'} + S_2$

$S_{1'} = LQ^2 * \sin\beta\cos\beta$, $S_2 = DQ^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$

Подберём такой угол β, при котором произведение $\sin\beta \cdot \cos\beta$ максимально.

Чистовик

№4

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6, & (1)\\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2, & (2)\\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3 & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y-6=-\dfrac{1}{xy},\\ -6x-2+3z=-\dfrac{1}{xz},\\ -3+6y-2z=-\dfrac{1}{yz}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2y-3xy^2+1=6xy\\ 3xz^2-6x^2z+1=2xz\\ 6y^2z-2yz^2+1=3yz\end{cases}$$

Для $\forall x,y,z$:

$$\begin{cases} 3(2x-3y)+(3z-6x)+\dfrac{3}{2}x(6y-2z)=0\\ z\cdot(2x-3y)+y(3z-6x)+x(6y-2z)=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{z}{3}=\frac{y}{1}=\frac{x}{\frac{3}{2}}$$

Тогда из (3): $\dfrac{1}{3y^2}=3$

$$\Downarrow$$

$$9y^2=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$z=1$$

$$\Downarrow$$

$$x=\frac{1}{2}$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$; $z=1$

Черновик ОДЗ: $2^{x^2-2} > 0$

на $\mathbb{R}$

№3

lg - ~~двоичный~~ десятичный логарифм

$x^2 - 3 > 0$

$x^2 > 3 \Rightarrow$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg(2^{x^2-2})$$

$\log_2 2^3 = 3$

$\left[\begin{array}{l} x < \sqrt{3}, \\ x > \sqrt{3} \end{array}\right.$

По сути $\cancel{2^t} = \cancel{t}$

$2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$

$$2^{\log_2(x^2-3)} = \log_2(2^{x^2-2}) = x^2 - 2$$

$x^2 - 3 = x^2 - 2$

$2^{\log_2 a} = a$

$-3 = -2$???

$\log_2 2^a = a \log_2 2 = a$

0 корней?

исследую ф-цию

Черновик

№2 $|x|-\arcsin x$

$$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+a=0$$

при любом $b\geq 1$ решение

Т.к. b - любое, выполнено и для $b=0$:

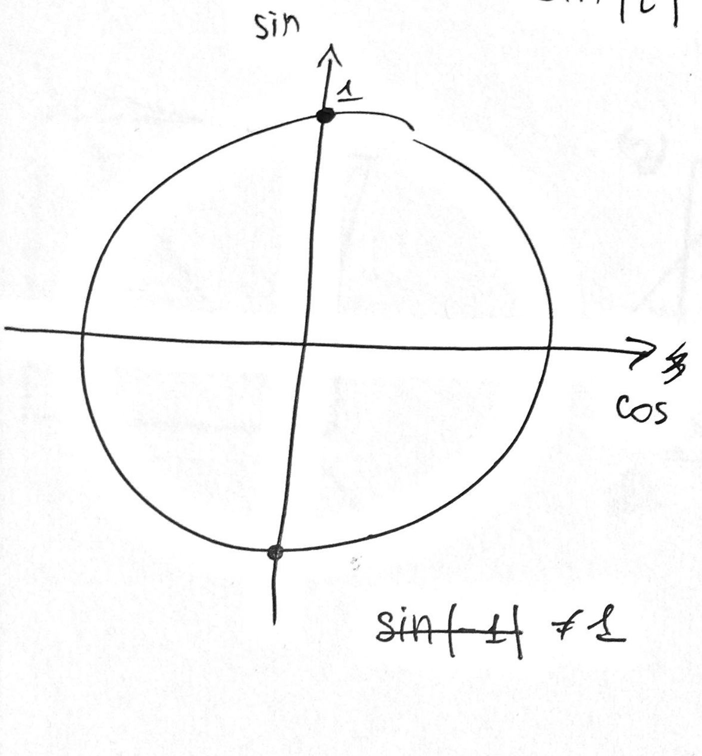
$|x|-\arcsin x+a=0$ Пусть $\arcsin x=t$.

$\cancel{\sin|x|-t+a=}$

$\cancel{\sin|t|=a}$ $\sin|t|-t+a=0$ $\sin t=t$

$\sin|t|=t-a$

$\sin 1=1$



при $a=0$ $\sin|t|=t$

или нет.....

Пусть $b=-1$

$\Downarrow$

$\cancel{|x|}-\arcsin x-\arccos x-\cancel{|x|}+1+a$

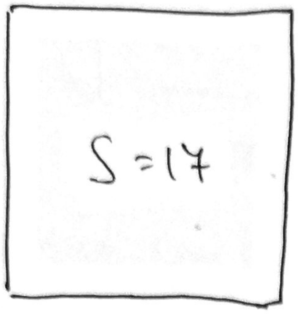
$\shortparallel$

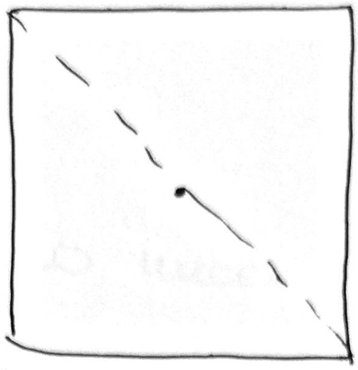
0

$\cancel{\sin|-1|}\neq 1$

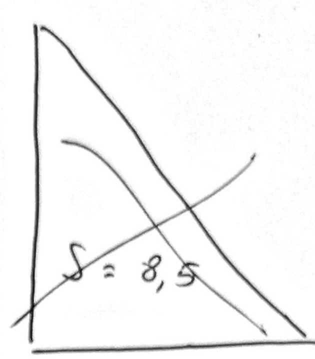
Черновик

№5





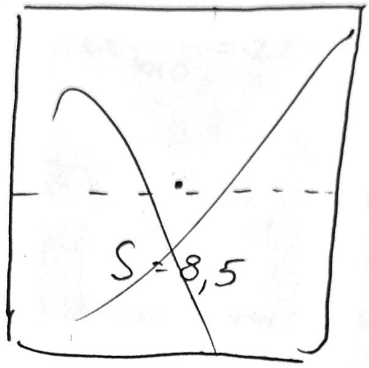
=>

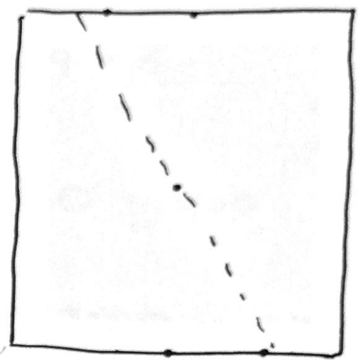


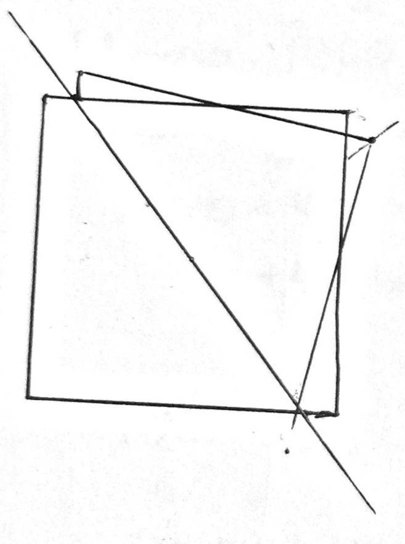
Требуется

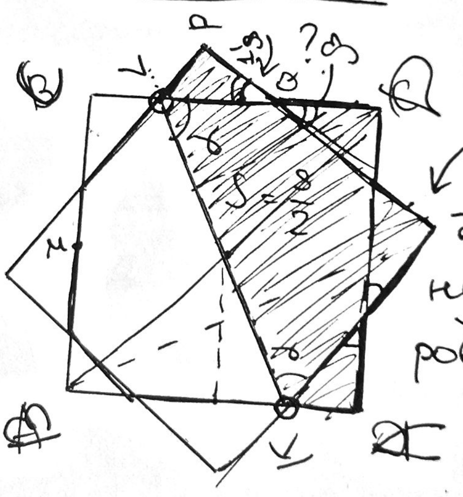
минимальная площадь покрытия, где

$S_{max} \geq 8,5$









нужно максимизировать уголки

Черновик

№1 202122..... 2 до 9

$\underbrace{202122\ldots}_{2021}$

2020 цифр – 1010 чисел

Это арифм. прогрессия 99 $\underbrace{100\ 101\ \ldots\ 719}_{620}$ 720

$a_n = a_1 + (n-1)d$, т.е $a_{1010} = 20 + 1009 = 1$

1) От 20 до 99 (вкл.): это 80 чисел, т.е. 160 цифр

2) От 100 до 999: это 900 чисел, т.е. ~~2700~~ цифр

Итого 1960

Далее идём по +4

$1960 + 4 \cdot 10 = 2000$

$+4 \cdot 5 = 2020$ => 2021 – первая цифра 4-зн. числа

Ответ: 1

1861 без 1) П 100 101 ...

$99 + 620 = 719$

$620 \cdot 3 + 1$ 620 трехзн. – 719

9

Черновик

№4

$$\begin{cases} \boxed{2x} - 3y + \dfrac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \dfrac{1}{xz} = \boxed{2} \\ 6y - \boxed{2z} + \dfrac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 9z - 18x + \frac{3}{xz}$

$\Rightarrow 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 12y - 4z + \frac{2}{yz}$

$$20x = 9z + 3y + \frac{3}{xz} - \frac{1}{xy}$$

$$\begin{cases} 2x^2y - 3xy^2 + 1 = 6xy \\ 3xz^2 - 6x^2z + 1 = 2xz \\ 6y^2z - 2yz^2 + 1 = 3yz \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y - 6 = -\dfrac{1}{xy} \\ -6x - 2 + 3z = -\dfrac{1}{xz} \\ -3 + 6y - 2z = -\dfrac{1}{yz} \end{cases}$$

$$-4x + 3y + z \cancel{+} 11 + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = -2x + 3y + 6 \\ \dfrac{1}{xz} = 2 - 3z + 6x \\ \dfrac{1}{yz} = 2z + 3 - 6y \end{cases}$$

$\cancel{2x(3y - z) = x^2(2xy}$

$2x(3y - z) = 8x^2(y - 3z) - 3x(y^2 + z^2)$

$2(3y - z) = 8x(y - 3z) - 3(y^2 + z^2)$

$$\begin{cases} 6(y-x) + z + \dfrac{y+x}{xyz} = 5 \\ 3(z-y) - 4x + \dfrac{z+y}{xyz} = 8 \\ 2(x-z) + 3y + \dfrac{z+x}{xyz} = 9 \end{cases}$$

$2 \cdot 3 = 6$ 

Черновик

$$2x^2y - x(\cancel{3y^2}\, 6y - 3y^2) + 1 = 0$$

$$D = (3y(3-y))^2 - 8y = 36y^2 - 36y^3 + 9y^4 - 8y$$