МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Новиков Владимир Павлович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Новиков Владимир Павлович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	10 баллов	10 баллов	80 баллов

Чистовик №1 Математика, 11

№1

Числа начинаются с 20

то есть двузнач.: 20..99 - 80 чисел 160 цифр

трехзнач: 100..999 - ~~2700~~ 900 чисел 2700 цифр

всего 2860 цифр > 2021 => наша цифра в 3-знач. числе.

1861 наша цифра, пропустим первые 620 чисел

наше число 720, на 2021 позиции стоит её первая цифра ~~разряд~~, то есть ответ 7

Ответ: 7

Чистовик № 2

№ 2

$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Т.к. необходимо найти случай при котором при любом b имеется хотя бы одно решение, рассмотрим случай, где

$b = -1$: $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$

имеем $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, тогда

$\frac{\pi}{2} - 1 = a$ - не зависит от x => обязательное (необходимое) условие.

Подставим: $|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

Необходимо, чтобы было хотя бы 1 решение, возьмем

$x = 1$: $1 - \frac{\pi}{2} + b(0 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$0 = 0$ при любом b

то есть $a = \frac{\pi}{2} - 1$ - достаточное и необходимое условие, чтобы при любом b было хотя бы 1 решение

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Чистовик №3 Математика 11

№3

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ - сколько корней имеет уравнение

пусть $t=\lg(x^2-3)$ $10^t = x^2-3$, тогда

$2^t = (\lg 2)(x^2-2)$

$2^t = (10^t+1)\lg 2$ $(10^t+1)\lg 2 - 2^t = 0$

пусть $f(x)=(10^t+1)\lg 2-2^t$, тогда $f'(t)=10^t \ln 10 \lg 2 - 2^t \ln 2$

$f'(t)=0:$ $10^t \cancel{\ln 10} \frac{\ln 2}{\cancel{\ln 10}} = 2^t \ln 2$ $10^t = 2^t$ $\left(\frac{10}{2}\right)^t = 1$

$\Rightarrow$ 2 промежутка монотонности (1 обнул. $f'(x)$) $5^t=1$ $t=0$

$\Rightarrow$ не более 2 корней

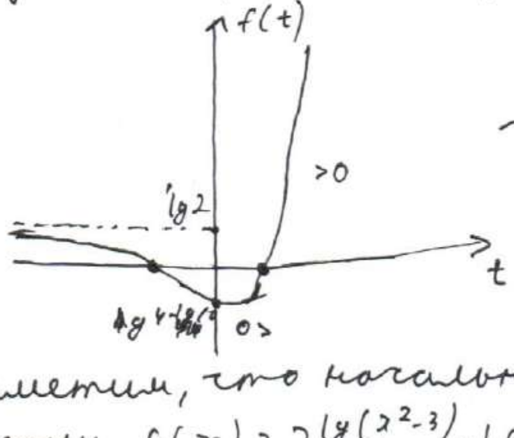
Построим примерный график функции:

при $t\to\infty$ $f(t)>0$ (т.к. 10^t значительно больше 2^t)
$(10^t-2^t\to\infty)$

при $t\to-\infty$ $f(t)>0$ ($f(t)\to\lg 2$ (т.к. 10^t и $2^t\to 0$))

при $t=0$ $f(t)=2\lg 2-1=\lg 4-\lg 10<0$
$f(t)<0$

т.к. $f(t)$ - непрерывна, имеет 2 промежутка монотонности и имеет знач. больше и меньше 0, то $f(t)$ ~~пересекает~~ обнуляется ровно 2 раза.



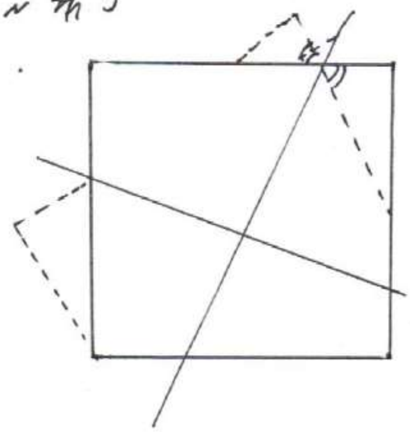
- схематичное изображение графика, 2 решения.

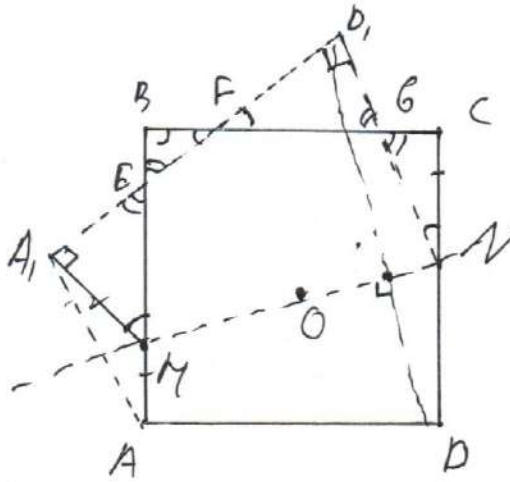
Заметим, что начальная функция сим. отн. x (если $f(x)=2^{\lg(x^2-3)}-\lg 2^{x^2-2}$, то $f(x)=f(-x)$) $\Rightarrow$ производя обратную замену $t=\lg(x^2-3)$ имея 2 значения t получим 4 значения x т.к. исходное уравнение имеет 4 корня

Ответ: 4

Чистовик № ~~4~~ 4 Математика, 11

№ ~~4~~ 5





Пусть a – сторона квадрата $a=\sqrt{17}$

Пусть A и A_1, D и D_1 симметричны отн. MN

$\Rightarrow$ ~~Пусть~~ $AM = CN = MA_1$ в силу симметрии $DN = BM = D_1N$

Получ. трапеции ~~трап~~: MA_1D_1N и $MBCN$ равны, $S_{MA_1D_1N} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} A_1D_1 \cdot (A_1M + D_1N) = \frac{1}{2}a^2$

Отсюд сумма площадей внешних треугольников A_1ME и FD_1G равны сумме площадей внутр. треуг. BEF и CGN

Данные прямоугольные треугольники подобны, $\triangle A_1ME = \triangle CGN$, откуда $\triangle BEF = \triangle D_1GF$

В силу симметрии, все данные треугольники равны тогда $ME = EF = FG = GN$ $S_{трап} = const$ максимизируем сумму площ. треуг. (прямоуг, т.к. всегда одинак), тогда

Из всех прямоугольных треугольников с фикс. гипотенузой наибольшая площадь у равнобедренного

Если $x = AM = BE$, то $ME = x\sqrt{2}$, $x + x\sqrt{2} + x = a$

$x = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$ тогда искомая $S = \frac{1}{2}a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}a^2 + x^2 =$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}+2}\right)a^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6+4\sqrt{2}}\right) 17 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)17 = 34 - 17\sqrt{2}$

Ответ: ~~$S_{max} = 17\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$~~ $S_{max} = 34 - 17\sqrt{2}$

~~Черновик~~ Чистовик №5 Математика, 11

№4

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Пусть $t=xyz$, тогда

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{z}{t}=6 \\ 3z-6x+\dfrac{y}{t}=2 \\ 6y-2x+\dfrac{x}{t}=3 \end{cases}$$

Заметим, что определитель левой части содержит одинаковые коэф. в диагонали, остальные коэф. различны, значит он не равен нулю и система линейнонезависимая => имеет 1 решение отн. t

Заметим, что $z=6t$ $y=2t$ и $x=3t$ удовлетворяет и других решений нет (т.к. независ. уравн.) подставим найд. знач. в исх. уравн.

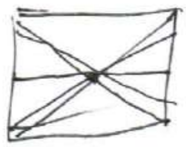
$36t^3=t$ $t=\pm\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-1 \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1)$ и $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1)$

Черновик №1

Математика, 11



$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}$

$2^{\lg(x^2-3)}=(x^2-2)\lg 2$

$x^2\geq 3 \quad |x|\geq\sqrt{3}$

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

$\cdot\left(3z-6+\frac{1}{xz}\right)\left(6y-2z+\frac{1}{yz}\right)=2x-3y+\frac{1}{xy}$

$\cdot |x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+a=0$

если $b=1$: $|x|-\underbrace{\arcsin x+\arccos x}_{\frac{\pi}{2}}-|x|+1+a=0$

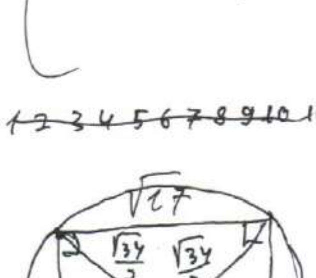
$\frac{\pi}{2}-1=a \quad a=\frac{\pi}{2}-1$ – обязат. (необходимо)

$|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+\frac{\pi}{2}-1=0$

$x=1: 1-\frac{\pi}{2}+b(0+1-1)+\frac{\pi}{2}-1=0$

при любом b им. корень 1

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11~~

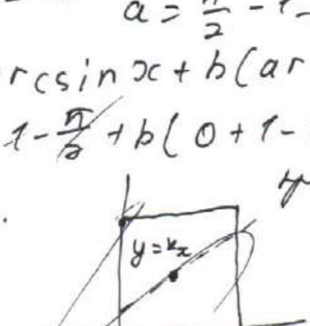


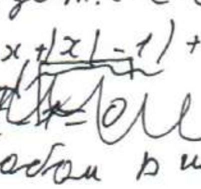
$a^2=17$

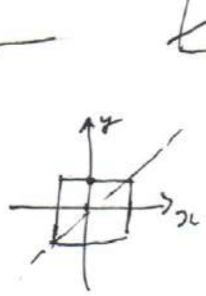
$a=\sqrt{17} \quad \sqrt{34}$

$\sqrt{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}=S$

$\frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}{2}=S$







20, 21, 22, 23. 2021

20, 21 ... 99 – 80 чисел. 160 цифр.

100 ... 999 900 чисел 1800 цифр.

1960 $\quad \begin{array}{r} 2021 \\ -1960 \\ \hline 61 \end{array}$ $\quad$ ~~1000, 1001, 1002, 1003~~

$4\cdot 15=60 \quad 61\to 1$

$y=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$y=kx$

$y=-\frac{\sqrt{17}}{2}$

$x\in\left[-\frac{\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$

$S_{max}=?$

$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2} \quad a=\lg 2$

$t=x^2-3$

$x^2-2(\lg 2)$

$\log_2 3+2$

$\log$

$2^{\lg t}=(t+1)\lg 2 \quad t^a=ta+a \quad x^2-3=t$

$t^{\lg 2}=(t+1)\lg 2 \quad$ ~~$t^a=ta+a$~~

Черновик-2 Математика, 11

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ $\quad x\frac{x}{2} \quad \frac{x^2}{2}$ $\quad \boxed{2a(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2}}$

$\cancel{2\lg}\ 2^{\lg(x^2-3)} = \cancel{\lg}(x^2-2)\lg 2$

$\lg 1$ $\quad \cancel{2021} - 160 = 1860$ $\quad \cancel{90}\ 180-90-\alpha-2\beta$ $\quad a = \frac{x}{2}$

$90-\alpha-2\beta$

$2\beta = 90-\alpha$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$ $\quad \beta =$ $\quad \frac{x^2}{8}$

$x\left(\frac{x}{2}\right)$

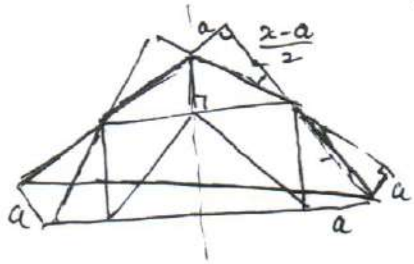
$\log_a b^a =$ $\quad \cancel{\log_{x^2-3}}$ $\quad \frac{x^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

$\log_b b^a = b$ $\quad \lg 2 = \log_{x^2-3}\left((x^2-2)\lg 2\right)$

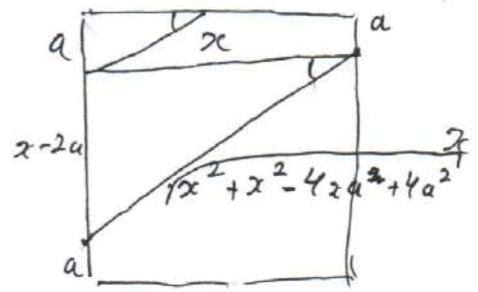
$90+\alpha$

$\log_{10} 2 = \log_{x^2-3} \ldots$ $\quad x^2 \cancel{-2ax} + a^2$

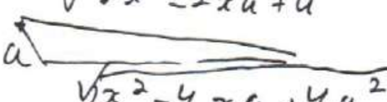
$\frac{x-a}{2}$ $\quad x^2 - ax - ax + a^2$



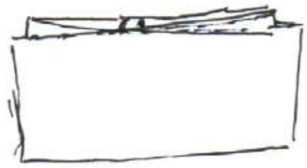
$\frac{(x-a)(x-a)}{2}$ $\quad x^2-2ax+a$

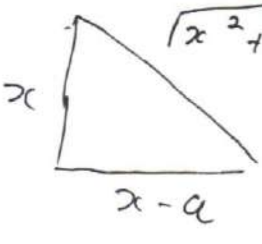


$\frac{(x-a)^2}{2}$



$S = \frac{a\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2}$





$S = \cancel{2}\, a\left(\frac{x-a}{2}\right) + \frac{x(x-a)}{2} + S_3$ $\quad$ - мак. = ? $\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}\right)$

$p = \frac{a+\sqrt{2x^2-2xa+a^2}+\sqrt{2x^2-4xa+4a^2}}{2}$ $\quad S = \frac{x(x-a)}{2}$

$\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)} = S_3$ $\quad \left(\sqrt{x^2+(x-2a)^2}-2a\right)\cdot\left(\frac{x-a}{2}\right)$ $\quad ax-1{,}5a^2+\frac{x}{2}$

$a(x-1{,}5a)+\frac{x}{2}$

$S = \cancel{2}\cancel{2a}\, a\left(\frac{x-a}{\cancel{2}}\right) + \left(\sqrt{x^2+(x-2a)^2}-2a\right)\left(\frac{x-a}{2}\right)$ $\quad 2ax-2a^2+\frac{x^2}{x}-xa+\frac{a}{2}$

$\cancel{4a^2}$ $\quad 2a\left(\frac{x-a}{2}\right)+$

$\cancel{4ax-1}$ $\quad 2a(x-a)+\frac{(x-a)}{2}$

$2ax-2a^2$ $\quad 2a(\cancel{\sqrt{17}-a}) + \cancel{\sqrt{17}+1}$ $\quad -1{,}5a^2+ax$ $\quad \frac{b}{2a} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) =$

~~Чистовик~~ Черновик – 3 Математика 11

№ 1

Числа начинаются с 20 и т.д

то есть двузнач.: 20.. 99 – 80 чисел 160 цифр.

трехзнач.: 100... 999 – 900 чисел 1800 цифр.

$160+1800=1960$ $2021-1960=61$ цифра осталась

1000... – 4х цифры, то есть $61/4=15$ – чисел войдет полностью

и на 2021 позиции будет начинаться число

то есть на 2021 позиции будет цифра 1

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

~~$x=1$~~ ~~$y=1$~~ $\cdot x, y, z \neq 0$

$x=-1$ $z=-1$

$$\begin{cases} 2x^2y-3xy^2-6xy=0-1 \\ 3z^2x-6x^2z-6xz=0-1 \\ 6y^2z-2z^2y+3yz=0-1 \end{cases}$$

$x(2xy-3y^2-6y$

$$\begin{cases} xy(2x-3y-6)=-1 \\ xz(3z-6x-2)=-1 \\ yz(6y-2z-3)=-1 \end{cases}$$

$3-\sqrt{2}$

$$\begin{cases} xy(2x \quad 3y \quad -6)=-1 \\ xz(-6x \quad 3z-2)=-1 \\ yz(\quad 6y \quad -2z-3)=-1 \end{cases}$$

$y(2x+3y-6)=z(-6x+3z-2)$

$3y^2+y(2x-6)=3z^2(-6x-2)$

$y(3y+y(2x-6))=z(3z+(-6x-2))$

~~$3(yz)^2$~~

$3y^2-3z^2=z(-6x-2)-y(2x-6)$

$xy(2x+3y-6)=yz(6y-2z-3)$

$2x^2+x(3y-6)=-2z^2+z(6y-3)$

$2(x^2+z^2)=z(6y-3)+x(6-3y)$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}$

$\frac{6+4\sqrt{2}+2}{2(6+4\sqrt{2})}$

$\frac{8+4\sqrt{2}}{12+4\sqrt{2}}$

$\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}$

$\frac{6+4\sqrt{2}+2}{2(6+4\sqrt{2})}$

$\frac{8+4\sqrt{2}}{12+4\sqrt{2}}$

$\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}$

$\frac{6+4\sqrt{2}+2}{2(6+4\sqrt{2})}$

$\frac{8+4\sqrt{2}}{16+4\sqrt{2}}$

$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}\right)17$

$16-2$

$(2+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})$

14

$8-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2$

$\frac{6-2\sqrt{2}}{14}$

Черновик ~ 4

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$ пусть $10^t = x^2-3$, тогда

$2^t = (10^t+1)\lg 2$

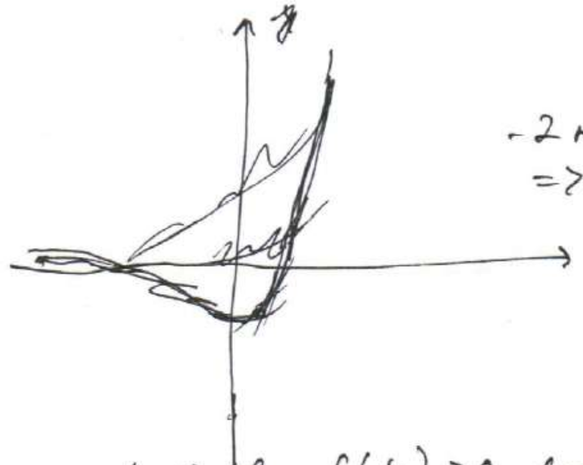
пусть $f(t) = (10^t+1)\lg 2 - 2^t$, тогда $f'(t) = 10^t \ln 10 \lg 2 - 2^t \ln 2$

$f'(t) = 0 \quad 10^t \ln 10 \lg 2 = 2^t \ln 2$

$\frac{\ln 2}{\ln 10}$

$10^t \cancel{\lg} 2 = 2^t \cancel{\ln 2}$

$10^t = 2^t \quad 5^t = 1 \quad t = 0$



- 2 промеж. монотонности => ~~2 корня~~ не более 2 корней (1)

при $t \to \infty$ $f(t) > 0$ (т.к. $10^t > 2^t$)

при $t \to -\infty$ $f(t) \to \lg 2$ (10^t и $2^t \to 0$)

при $t = 0$ $f(0) = 2\lg 2 - 1 = \lg 4 - \lg 10 < 0$

2 промеж. монот, есть знач > 0 и < 0 => 2 корня,

по (1) ровно 2

~~Заметим, что t опр. по значениям => каждый t~~ Заметим, что $f(x) = f(-x)$

~~задает x_0 и $-x_0$ и при $x = 0$ t не сущ.~~

=> уравнение имеет 4 решения

~~бега~~ $12t - 6t + \frac{3t}{t} = 6$

~~$6t+3=6$~~ $\cdot 6t - 6t + \frac{6t}{t} = 6$

~~$6t = 3$~~

~~$t = \frac{1}{2}$~~

~~Чистовик №4~~ Черновик №5

Математика, 11

№5