МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Баранова Юлия Александровна**

Класс: **8**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Баранова Юлия Александровна

Класс: 8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	0 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

Чистовик 7. Лист 7.

Задача 5.

Представим ситуацию в виде графа. Джентльмены - вершины, рукопожатие - ребро. Тогда для любых 3 дж. не больше 3 рёбер между ними. Кол-во троек, которые можно выбрать: $\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2} = 20\cdot19\cdot3$. Каждое ребро посчитано во всех n-2 тройках с 2 верш., ~~соед.~~ которые соед. данное ребро $\Rightarrow$ общее ~~кол-во~~ кол-во
т.к. по 2 р-ра в 3.
рёбер $\leq \frac{20\cdot19\cdot18\cdot2}{3\cdot2\cdot18} = \frac{20\cdot19}{3}$, рёбер целое кол-во поэтому их $\leq \frac{380}{3} \Rightarrow \boxed{\leq 126}$.

Ответ: 126 рёбер.

Чистовик 6. Лист 6.

Задача 4.

Докажем по индукции, что произведение чисел вида $\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1022}{1023} > \frac{1}{3}$. База: $\frac{100}{101} > \frac{1}{3}$. Теперь будем добавлять по 1 множителю в произведение.

Переход: $A\cdot\frac{n}{n+1} \to A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3}$. ~~A~~ A – это дробь, которая получалась до умнож. на $\frac{n}{n+1}$.

По предп. инд. $A\cdot\frac{n}{n+1} > \frac{1}{3} \Rightarrow 3An > n+1 \Rightarrow 3A > \frac{n+1}{n}$.

$A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} \;?\; \frac{1}{3}$. $3A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} \;?\; 1$

$\cancel{\frac{3An}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} \;?\; 1}$

$\cancel{3A\cdot\frac{n}{n+1} \;?\; \frac{n+3}{n+2}}$

$\cancel{3A \;?\; \frac{(n+3)(n+1)}{n(n+2)}}$

$3A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} =$

$= \cancel{\frac{n+2}{n+3}}\,\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\cdot\frac{n}{n+1} > 1\cdot\frac{n}{n+1} > A\frac{n}{n+1} > \frac{1}{3}$.

$\cancel{\frac{n+2}{n+3} \;?\; \frac{1}{3} \quad 3(n+2) \;?\; n+3 \quad \underbrace{3n+6 > n+3}_{(n>0)}}$

$\cancel{3A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} > \frac{n+2}{n+3} > \frac{1}{3}}$ Заметим, что A – это произведение дробей, каждая из которых $< 1 \Rightarrow A < 1 \Rightarrow$

$A\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n^2+3n+3}{n^2+3n}\cdot\frac{n}{n+1} >$

$> 1\cdot\frac{n}{n+1} > A\cdot\frac{n}{n+1} > \frac{1}{3}$ по предп. индукции $\Rightarrow$ переход доказан.

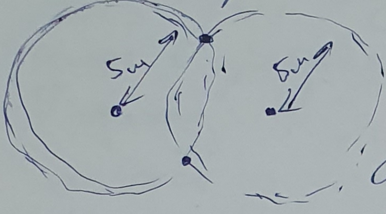
$\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023} > \frac{1}{3} = \frac{5}{15} > \frac{5}{16}$.

Ответ: $\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023} > \frac{5}{16}$.

Чистовик 5. Лист 5.

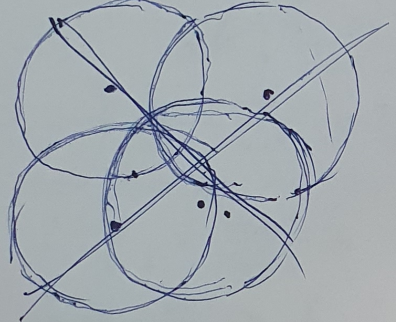
Задача 6.

Рассмотрим каких-нибудь 2 мальчиков.



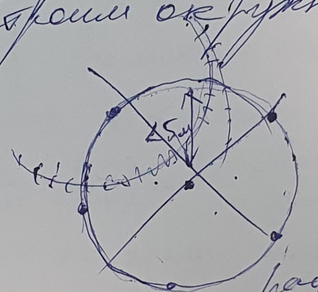
Нарисуем окр-ти радиусом 5 м с центром в точках, где стоят мальчики. Тогда у этих окружностей не более 2 точек пересечения. Значит для каждой пары мальчиков есть не более 2 девочек на расст. 5 метров от них. Т.е. всего девочек не более $2 \cdot \underbrace{\frac{5 \cdot 4}{2}}_{\text{кол-во разл. пар мальчиков.}} = 20$

Вместо мальчиков будем рисовать окружности радиусом 5 м, с центром в т., где стоит мальчик. А точки пересечения окр-тей — девочки.



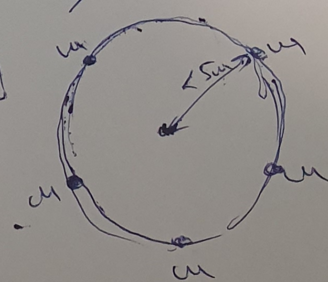
Построим пример.

Строим окружность с радиусом < 5 м.



На ней через равные промежутки отмечаем 5 точек. - это мальчики.

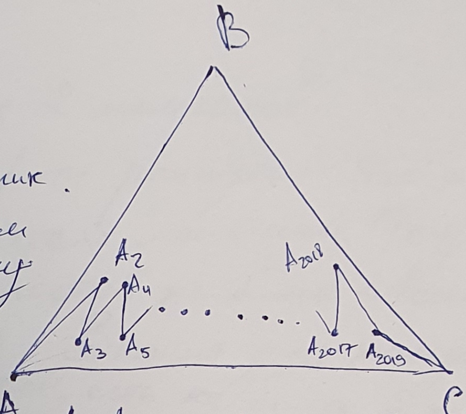
Проводим окружности с радиусом 5 м. и центром в этих точках. Выберем такой радиус нач. окр. чтобы отрезки соед. 2 точки не были равны 5 м. Тогда все окружности будут пересекаться со всеми остальными в 2 т. и не будет т. в которой пересек. сразу 3 окр. => точек. пересеч. 20 => => девочек 20.



Ответ: 20.

Чистовик ~~3~~ 4 Лист 4.

Задача 7.



Рассмотрим такой пример.

Фигура $AA_2A_3\ldots A_{2019}C$ – 2020 угугольник.
(Расстояния между точками мы можем делать сколь угодно малыми, поэтому мы сможем вырезать такую фигуру).

$\angle A_2AC < 60^\circ$; $\angle A_{2019}CA < 60^\circ$

т.к. ABC – прав., его углы $= 60^\circ$.

Тогда оставшаяся фигура: $ABCA_{2019}\ldots A_3A_2$ – 2021 угольник.

Значит пример работает, значит это возможно.

Ответ: можно.

Чистовик 3. Лист 3.

Задача 3.

Заметим, что $111 = 37\cdot 3 \Rightarrow 111 \vdots 37$. Разобьём все числа, кроме, ~~те~~ имеющих вид $\overline{aaabbb}$ (a может быть равно b) на такие группы: $\overline{abcdef}$, $\overline{bcaefd}$; $\overline{cabfde}$, заметим, что ни одна цифра не равна 0 $\Rightarrow$ все эти числа ~~сущ~~ 6-значные.

Заметим, что все эти числа различны, т.к. иначе например $\overline{abcdef} = \overline{bcaefd} \Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$; $b=c$; $d=e$; $d=f \Rightarrow a=b=c$. $d=e=f \Rightarrow$ это числа вида $\overline{aaabbb}$, которые занесены в отдельную группу. Заметим, также, что каждое число попало ровно в 1 группу, иначе пусть число $\overline{abcdef}$ в 2 группах, тогда в обеих группах есть числа $\overline{bcaefd}$ и $\overline{cabfde}$, т.к. мы разбиваем на группы смещая строго цифры на 1 позицию вправо среди I тройки и среди II. Тогда обе группы полностью совпадут – противоречие. Рассмотрим сумму чисел в одной группе.

$\overline{abcdef} + \overline{bcaefd} + \overline{cabfde} = 1000(100(a+b+c)+10(a+b+c)+(a+b+c)) + 100(d+e+f) + 10(d+e+f)+(d+e+f) = 111\cdot 1000(a+b+c)+111(d+e+f) = 111\cdot(1000(a+b+c)+d+e+f) \vdots 111$.

Сумма чисел в каждой группе $\vdots 111$. Тогда остаётся прибавить числа вида $\overline{aaabbb}$, рассмотрим ~~их~~ ~~их~~: $\overline{aaabbb} = 100b+10b+b+1000(100a+10a+a) = 111b + 111\cdot 1000a = 111(1000a+b) \vdots 111 \Rightarrow \vdots 37$. Значит ~~тогда~~ все такие числа $\vdots 37 \Rightarrow$ вся сумма будет $\vdots 37$, т.к. сумма в каждой группе $\vdots 37$ и ост. числа $\vdots 37$. (Заметим, что каждое число посчитано, т.к. если число не вида $\overline{aaabbb}$, то оно обязательно попало в какую-то группу.

Чистовик 3. Лист 3.

Чистовик 2. Лист 2.

Задача 2.

Пусть обычно Иван Семёнович выезжает в t_0 часов, едет со скоростью v км/ч, а расстояние между его домом и работой S км. Тогда в обычный день $t_0 + \frac{S}{v} = 9$ (1).
Однажды он проспал на 40 мин, т.е. $\frac{2}{3}$ ч, т.е. выехал в $t_0 + \frac{2}{3}$ и поехал со скоростью на 60% больше v, т.е. $1{,}6v$, и прибыл в 8 ч 35 мин или $8\frac{7}{12}$ ч. Тогда:
$t_0 + \frac{2}{3} + \frac{S}{1{,}6v} = 8\frac{7}{12}$ (2). Пусть, чтобы он приехал в 9.00, проспав на $\frac{2}{3}$ ч, он должен ~~увеличить скоро~~ ехать со скоростью kv км/ч, тогда $t_0 + \frac{2}{3} + \frac{S}{kv} = 9$ (3). Вычтем из (1) (2):

$$\frac{S}{v} - \frac{2}{3} - \frac{S}{1{,}6v} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S}{v}\left(1 - \frac{1}{1{,}6}\right) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{S}{v}\left(\frac{1{,}6 - 1}{1{,}6}\right) = \frac{13}{12}.$$

$$\frac{0{,}6}{1{,}6} \cdot \frac{S}{v} = \frac{13}{12}$$

$$\frac{S}{v} = \frac{13 \cdot 1{,}6}{12 \cdot 0{,}6} \quad (4)$$

Теперь вычтем из (3) (2):

$$\frac{2}{3} + \frac{S}{kv} - \frac{S}{v} = 0$$

$$\cancel{\frac{2}{3}}\frac{S}{v}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{3}.$$

Подставим (4).

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{v}{S}$$

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 0{,}6}{13 \cdot 3 \cdot 1{,}6}.$$

$$1 - \frac{1}{k} = \frac{3}{13}.$$

$$\frac{1}{k} = \frac{10}{13}$$

$$10k = 13$$

$$k = 1{,}3$$

Тогда искомая скорость $1{,}3v$, найдём на сколько процентов отн. v она увеличилась: $\frac{1{,}3v - v}{v} \cdot 100\% = 30\%$.

Ответ: на 30%.

Чистовик 2 Р

Чистовик 1. Лист 1.

Задача 1.

Рассмотрим произведение $2020\cdot2018\cdot2014$ по модулю 2027.

$2020 \underset{2027}{\equiv} -7$; $2018 \underset{2027}{\equiv} -9$; $2014 \underset{2027}{\equiv} -13$. $\Rightarrow 2020\cdot2018\cdot2014 \underset{2027}{\equiv}$

$\underset{2027}{\equiv} (-7)\cdot(-9)\cdot(-13) \underset{2027}{\equiv} -(7\cdot9\cdot13)$. Тогда:

$\cancel{7\cdot 9\cdot 13+2020\,2027}\ 7\cdot9\cdot13+2020\cdot2018\cdot2014 \underset{2027}{\equiv} 7\cdot9\cdot13+(-7\cdot9\cdot13) \equiv$

$\underset{2027}{\equiv} 0$. Значит $N \vdots 2027$, заметим, что $N > 2027$, т.к.

$N = 7\cdot9\cdot13 + 2020\cdot2018\cdot2014 > 2020\cdot2018 > 2000^2 = 4000000 > 2027$.

Значит у числа N мы нашли уже хотя бы 3 делителя, 1, 2027 и само число $N \Rightarrow N$ – составное.

Ответ: составное.