МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Абдуллаев Эмин Алиевич**

Класс: **9**

Технический балл: **65**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Абдуллаев Эмин Алиевич

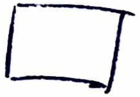
Класс: 9

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
15 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	0 баллов	65 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

Чистовик

№4. Поскольку нет трёх попарно знакомых, их можно организовать, например, „кольцами" по 4, как показано ниже:



Посмотрим, как это будет выглядеть, если соединить таким образом соседних людей:

и так далее.

Также можно соединять группами (большими 4-х).

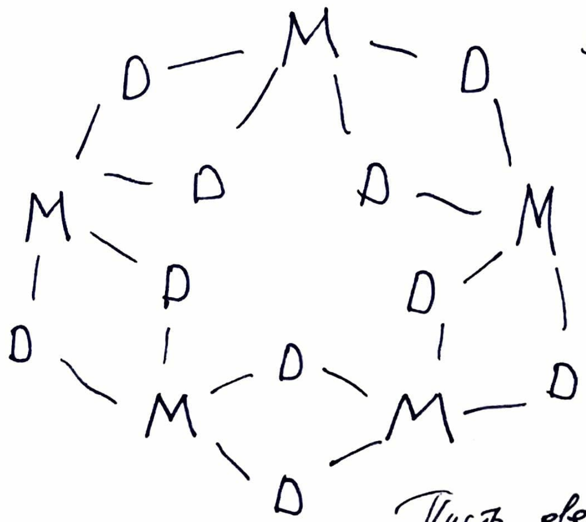
Группой из 5и человек соединить нельзя, т.к будут образовываться треугольники из трёх попарно знакомых, поэтому, можно сделать из 6, 8, 10 человек.

Кол-во рукопожатий можно найти следующим образом:
есть 4 вида групп: 2, 4, 6, 8, 10, их всего 5.

Ответом является произведение $20 \cdot 5 = 100$, т.к организуя группу, добавляем одно соединение.

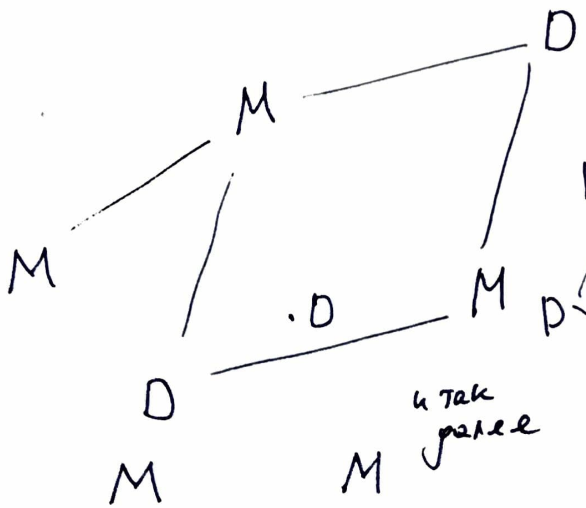
Ответ: 100 рукопожатий.

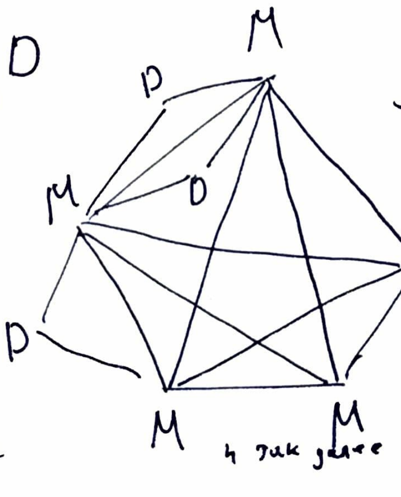
№5 Самый простой способ — это вначале поставить 5-х мальчиков в вершины правильного пятиугольника. (М – мальчик, D – девочка)



В данном примере расстояние между мальчиками велико, поэтому, можно сделать ~~длину~~ расстояние между двумя соседними мальчиками меньше, чтобы девочки могли быть также между другими.

Пусть две девочки находятся между любыми двумя мальчиками.





Заметим, что расстояние между двумя самыми удалёнными мальчиками меньше 10 м, кол-во девочек $= 2 \cdot 10 = 20$

Ответ: 20 девочек

№2 Лист 3 Чистовик

Пусть каждодневная скорость Ивана Семёновича $- v$

Пусть весь путь $= 1$, время измеряется в минутах.

Разница во времени составляет 65 минут, а нужно, чтобы было 40.

t - время для скорости v (каждый день)

V - скорость, необходимая, чтобы прибыть вовремя (если выехать на 40 минут позже)

$$\begin{cases} t = \frac{1}{v} \\ t - 65 = \cancel{\frac{S}{1{,}6v}} = \frac{1}{1{,}6v} \\ t - 40 = \frac{1}{V} \\ k = \left(\frac{V}{v} - 1\right) \cdot 100 \end{cases}$$

Пусть k - кол-во процентов, т.е. ответ задачи. (На которую V больше v)

Подставим $1/v = t$ во второе равенство:

$$\frac{1}{v} - 65 = \frac{1}{1{,}6v}$$

$$\frac{1 - 65v}{v} = \frac{1}{1{,}6v} \Leftrightarrow v = 1{,}6v - 104v^2$$

$$104v - 0{,}6v = 0 \Leftrightarrow v = \frac{3}{520}$$

Тогда $t = \frac{1}{v} = \frac{520}{3}$

Поскольку $t - 40 = \frac{1}{V}$, то $V = \frac{1}{t - 40}$

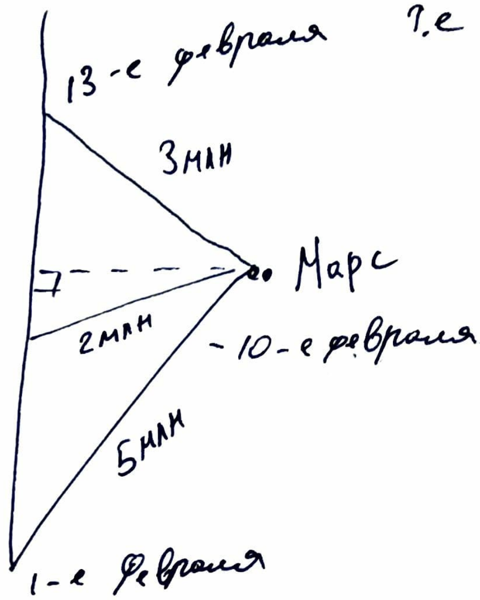
$$V = \frac{1}{\frac{520}{3} - 40} = \frac{3}{400}$$

$$\frac{k}{100} = \left(\frac{V}{v} - 1\right) = \frac{\cancel{3}}{400} \cdot \frac{520}{\cancel{3}} - 1 = 0{,}3 \Leftrightarrow k = 30$$

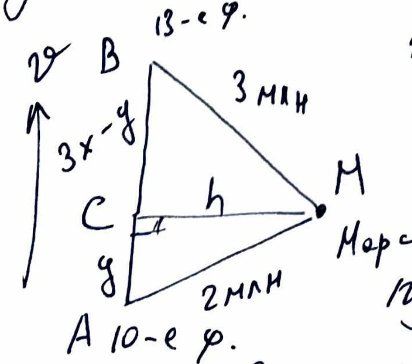
Ответ: нужно увеличить на 30% относительно изначальной скорости.

Чистовик

№6



Заметим, что один из дней не нужен, т.е данные являются избыточными, т.к задача — найти в каком отношении высота делит треугольник.



Между 13-м и 10-м февраля проходят 3 дня, Пусть расстояние, пройденное зондом за 1 день $= x$.

$AB = 3x$. Пусть $MC = h$, $AC = y$

Тогда справедлива система уравнений для прямоугольных $\triangle ACM$ и CBM по Т. Пифагора:

$$\begin{cases} 4 = y^2 + h^2 \\ 9 = h^2 + (3x-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = y^2 + h^2 \\ 9 = h^2 + 9x^2 - 6xy + y^2 \end{cases}$$

Следовательно, подставив $4 = y^2 + h^2$ получим, что

$$5 = 9x^2 - 6xy$$

$$6xy = 9x^2 - 5 \Leftrightarrow y = \frac{9x^2 - 5}{6x}$$

Напомним, что x — это день.

$$y = \frac{9-5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ дня} = 16 \text{ часов}.$$

x + 12:00 10-го февраля — это момент минимального расстояния

16 часов + 12:00 10-го ф. = 4:00 11-го февраля.

Ответ: 4:00 11-го февраля.

№ 1 Чтобы выпало чётное количество орлов, возможно много вариантов, т.е 0, 2, 4, 6, 8, 10 ... и т.д раз.

Рассчитаем искомую вероятность по индукции.

База индукции: если бросить одну монетку, то вероятность выпадения орла — $1/2$ (Пусть вероятность — P)

$$P_1 = 1/2$$

Докажем, что $P_{n+1} = P_n = 1/2$

Поскольку существуют 4 случаи:

первые n раз: чётное или нечётное

последний ($n+1$-й) раз: чётное или нечётное.

чётное = чётное + чётное = нечётное + нечётное,

Если $P_n = 1/2$, то $P_{n+1} = \frac{2}{4}$, т.к есть 2 варианта, которые подходят из 4-х возможных.

Заметим, что все решения выше верны, т.к события являются независимыми.

По индукции: $\begin{cases} P_1 = 1/2 \\ P_{n+1} = P_n = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow P_{2021} = 1/2$

Ответ: $1/2$

лист 6 Чистовик

№3

$$\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023} \quad и \quad \frac{5}{16}$$

Заметим, что исходную левую часть можно преобразовать как

$$\frac{2^n\{\cdot 50\cdot 51\cdot 52\cdot 53\cdot 54\cdot\ldots\, 510\cdot 511}{101\cdot 103\cdot 105\cdot 107\ldots\cdot 1021\cdot 1023}$$

$\cancel{50}$ $51^2-50^2>101^2-100^2$

Сократим все „повторения": ~~101~~ и 101 и 202 и т.д.

Следовательно $\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots<\frac{5}{16}$, т.к, например $\frac{5}{16}>\frac{1}{4}$

№7 $P(x)\not\equiv 0$

$(x-2020)\cdot P(x+1)=(x+2021)\cdot P(x)$

Очевидно, что $P(x)$ не может быть константой.

$$\frac{P(x)}{P(x+1)}=\frac{x-2020}{x+2021}$$

Пусть $P(x)=ax+b$

Тогда $P(x+1)=ax+a+b$

$$\frac{P(x)}{P(x+1)}=\frac{ax+b}{ax+a+b}$$

$\frac{x-2020}{x+2021}=\frac{ax+b}{ax+a+b}$ следует из равенств выше.

Заметим что если $P(x)$ – многочлен, например, 3-й степени, то в отношении $P(x)/P(x+1)$ будут кубы, что ~~н~~ противоречит по условию.

Поэтому, $P(x)$ - линейная функция $\Rightarrow P(x)=0$ имеет 1 корень

Ответ: 1 корень.

Черновик
лист 1

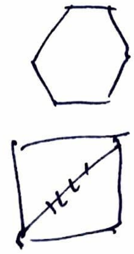
№3

$$\frac{100}{101}\times\frac{102}{103}\cdot\ldots\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023} \vee \frac{5}{16} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103} = \frac{2\cdot 50}{101}\cdot\frac{2\cdot 51}{103} = 4\cdot\left(\frac{50\cdot 51}{101\cdot 103}\right)\approx 4\cdot\left(\frac{2500}{10000}\right) \cancel{<} \frac{1}{2}$$

$$\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\frac{104}{105}\cdot\frac{106}{107}\cdot\ldots\frac{1018}{1019}\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023} =$$

$$= 2^n \cdot \underline{50\cdot 51\cdot 52\cdot 53\cdot 54\cdot 55 \ldots}$$

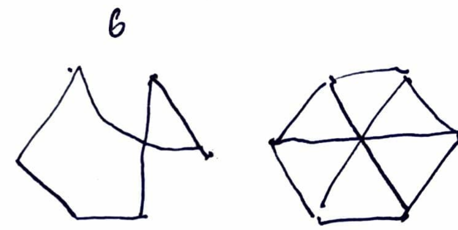
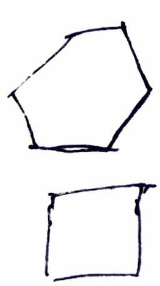
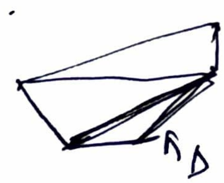
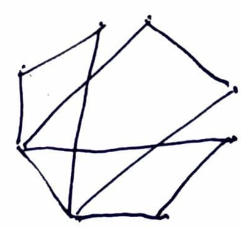
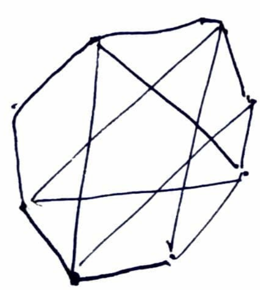
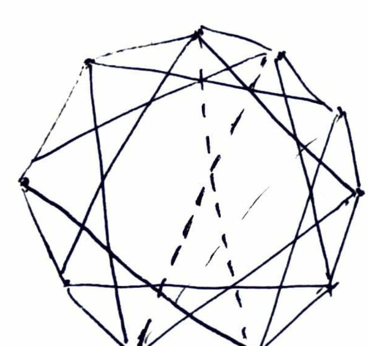
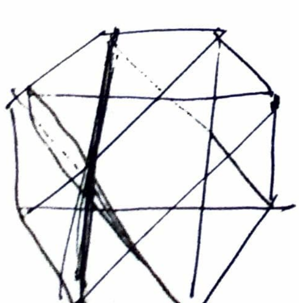


2 связи

№4 ← 20 →; ситуации A—B—C нет.

Пусть 6 знакомых:

~~...~~ Пусть 8:

6 > 4

?

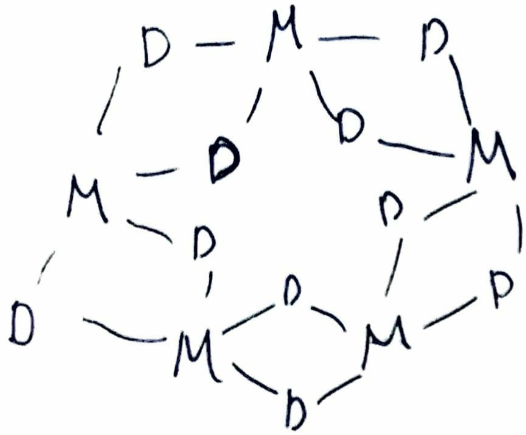
соседние (по 2) + по 4 + по 6 + по 8 + по 10 =

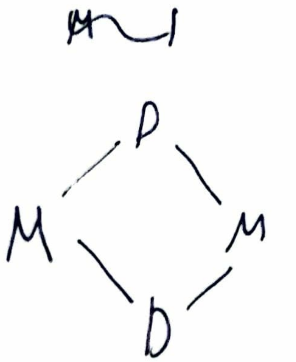
= ~~...~~ 20 · 5 = $\boxed{100}$

Чорновик лист 2

№5

$M \xleftarrow{5м} D \xleftrightarrow{5м} M$

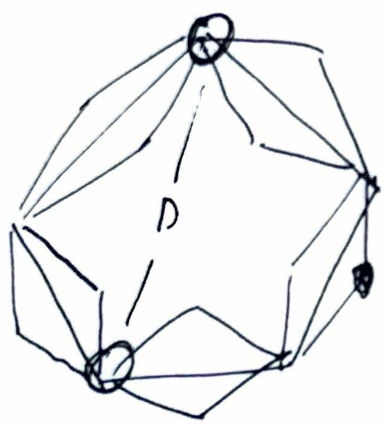


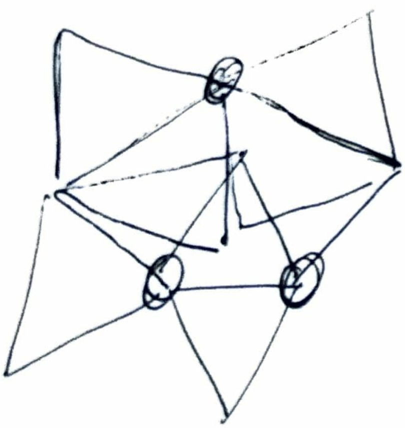


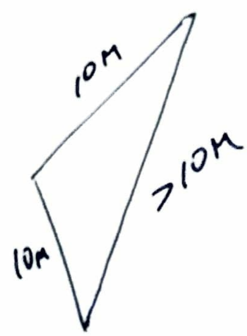
M M

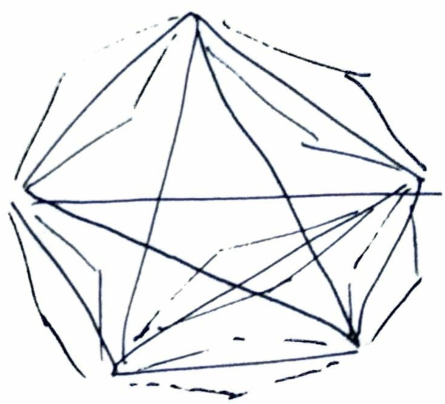
D

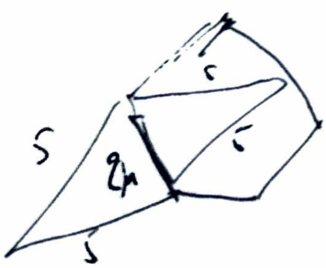
M M











$\boxed{20}$

~~Чистовик~~ Черновик

Лист 3

~~№8~~ №7

$P(x) \not\equiv 0$

$(x-2020)\cdot P(x+1) = (x+2021)\cdot P(x)$

$P(x)=0$ – сколько корней?

Какая степень x у $P(x)$?

0. $(x-2020)\cdot k = x+2021$ $\quad k \in \varnothing$

1. $P(x) = ax+b$

$(x-2020)\cdot(a(x+1)+b) = (x+2021)\cdot(ax+b)$

$(x-2020)\cdot(ax+a+b) = (x+2021)\cdot(ax+b)$

$\cancel{ax^2}+ax+\cancel{bx}-2020ax-2020a-2020b = \cancel{ax^2}+\cancel{bx}+2021ax+2021b$

~~$-2021ax - 2021ax - 2020ax - 2020a - 2021b - 2020b$~~

$ax - 2020ax - 2020a - 2020b = 2021ax + 2021b$

$-2019ax - 2021ax - 2020a - 2020b - 2021b = 0$

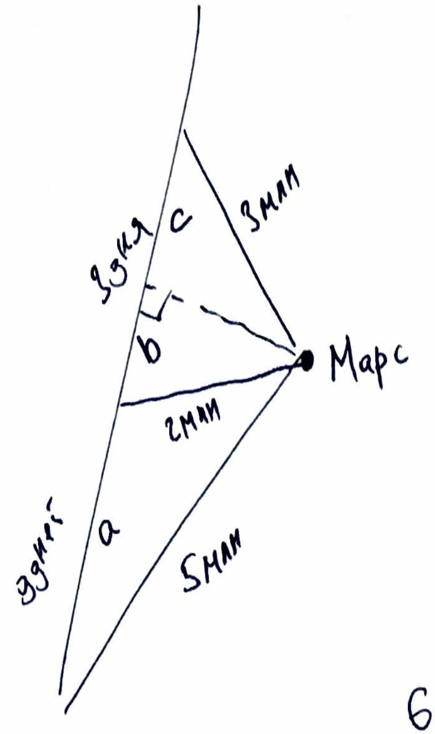
$-4040ax - 2020a - 4041b = 0, \ x \in \mathbb{R}$

2.

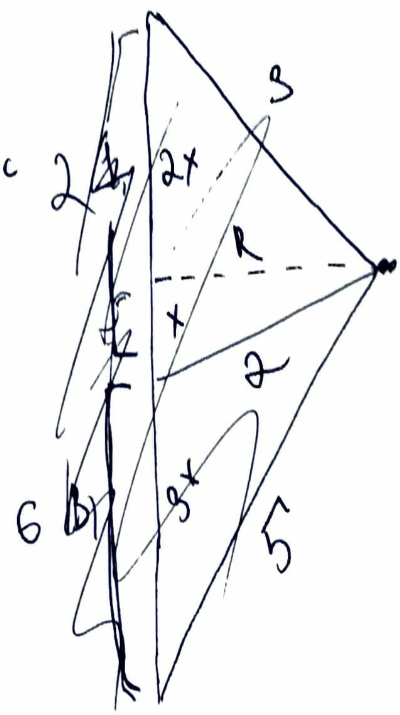
~~$(x-2020)(ax^2$~~

$(x-2020)(a(x+1)^2+bx+c) = (x+2021)(ax^2+bx+c)$

№ 6



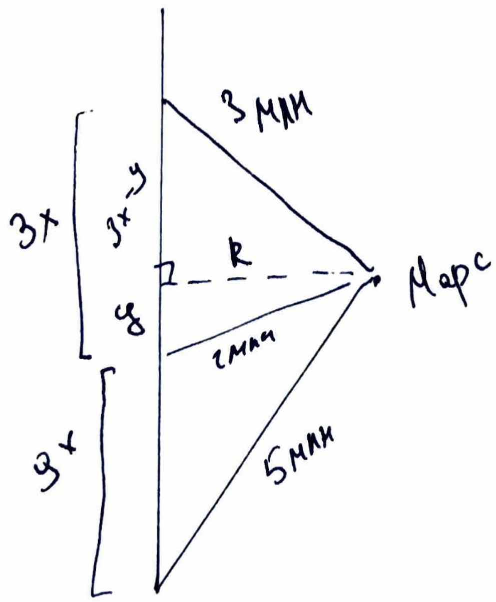
$\cancel{\frac{a+b}{b+c}} = 3$



$9 = (2x)^2 + R^2$

$R^2 + x^2 = 4$

$(4x)^2 + R^2 = 25$



$$\begin{cases} 9 = (3x-y)^2 + R^2 \\ 4 = R^2 + y^2 \\ 25 = (y+9x)^2 + R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = 9x^2 - 6xy + y^2 + R^2 \\ 4 = R^2 + y^2 \\ 25 = y^2 + 18xy + 81x^2 + R^2 \end{cases}$$

$5 = 9x^2 - 6xy$ $\qquad 6xy = 9x^2 - 5$

$\cancel{9 = x(9x - 6y}$ $\qquad y = \frac{9x^2 - 5}{6x}$

X - день

$y = \frac{9-5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ после 12:00 10-го февраля

12:00 + 16ч = $\boxed{\text{4:00 11 февраля}}$

Черновик лист 5

№1

Пусть 5 раз: либо 0, 2, 4

Вероятность:
0 → 1 в.
2 → 10 в.
4 → 5 в.
$\Rightarrow \cancel{\frac{26}{32}} = \frac{13}{16}$

$\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

Пусть 3 раза: либо 0, 2:
Вероятность 0 → 1 в.
2 → 3 в.
⇒ всего $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Пусть 2021 раз: 0, 2, 4, ~~8~~ 16

Вероятность
0 → 1 в.
$2 \to \frac{2021 \cdot 2020}{2!}$
$4 \to \frac{2021 \cdot 2020}{4!}$

$$\sum = 1 + \left(\frac{2021 \cdot 2020}{1 \cdot 2}\right) + \left(\frac{2021 \cdot 2020 \cdot 2019}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)$$

Геометрическая прогрессия.

$$\boxed{\sum = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = \frac{1(2^4 - 1)}{1} = 15.$

$q = 2$

$$\frac{2021 \cdot 2020}{1 \cdot 2} + \frac{2021 \cdot 2020 \cdot 2019}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Пусть 7 раз: 0, 2, 4, 6
~~0 → 1~~
~~2 → 21~~
~~$3 \to \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$~~
~~6 → 1~~
~~$4 \to$ не 2: $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$~~
~~6 → 7 в.~~
$\underbrace{7 + 21}_{28} + \underbrace{21 + 7}_{28} = 56$

$\frac{56}{128}$

~~0 → 1 в.~~
~~2 → 21 в.~~
~~$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 70$~~
~~4 → 70~~
~~6 → 7~~

$1 + 21 + 70 + 7 =$ ~~28~~ $91 + 7 + 1 = 99$

$\frac{99}{128}$

Пусть 7 раз:
0 → 1 в.
$2 \to \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ в.
$4 \to \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{24} = 35$ в
$3 \to \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ в.
6 → 7 в.

$\sum = 1 + 21 + 35 + 7 = 28 + 42 = 70$

70

$(x-2020)\cdot P(x+1)=(x+2021)\cdot P(x)$ Черновик лист 6

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $ad=bc$

$P(x)$

$\frac{x-2020}{x+2021}=\frac{P(x)}{P(x+1)}$

$f(x)=ax+b$

$f(x+1)=ax+a+b$

$\frac{f(x)}{f(x+1)}=\frac{ax+b}{ax+a+b}=\frac{ax+b+a-a}{ax+a+b}=$

$=1-\frac{a}{ax+a+b}$

$b=-2020$

$a=1$

$a+b$

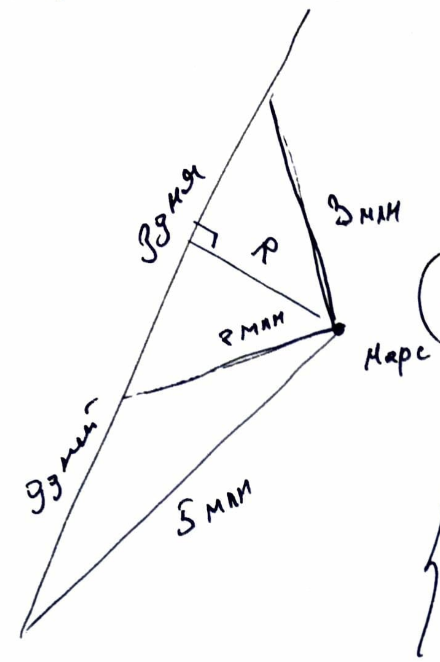
$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x+1)=$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c=$

$=ax^2+2ax+a+bx+b+c$

№6



Черновик лист 7

№2 $v \to 9:00$

$$\begin{cases} t = \dfrac{S}{v} \\ t-65 = \dfrac{S}{1{,}6v} \end{cases};$$

$$\cancel{t = }$$

$$t - 40 = \frac{S}{V} = \frac{1}{V}$$

Пусть $S = 1$

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{v} \\ t - 65 = \dfrac{1}{1{,}6v} \end{cases} \qquad \begin{cases} tv = 1 \\ 1{,}6vt - 65 \cdot 1{,}6v = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{v} - 65 = \frac{1}{1{,}6v}$$

$$\frac{1 - 65v}{v} = \frac{1}{1{,}6v}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{46} \\ 65 \\ \times\ 1{,}6 \\ \hline 390 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 65 \\ \times\ 1{,}6 \\ \hline 390 \\ +\ 65 \\ \hline 104{,}0 \end{array}$$

$$v = 1{,}6v - 1{,}6v \cdot 65v$$

$$v = 1{,}6v - 104v^2$$

$$104v^2 - 0{,}6v = 0 \mid : v\ (\neq 0)$$

$$104v - 0{,}6 = 0$$

$$104v = 0{,}6$$

$$v = \frac{0{,}6}{104} = \frac{6}{1040} = \frac{3}{520}$$

$$t = \frac{520}{3}, \text{ т.к. } t = 1/v$$

$$\frac{t-40}{1} = \frac{1}{V}$$

$$1 = Vt - 40V$$

$$1 = V(t-40) \Rightarrow V = \frac{1}{t-40}$$

$$V = \frac{1}{\frac{520}{3} - 40} = \frac{1}{\frac{520}{3} - \frac{120}{3}} = 1 : \left(\frac{400}{3}\right) = 3/400$$

кол-во процентов:

$$\frac{3}{400} : \frac{3}{520} = \frac{\cancel{3}}{400} \cdot \frac{520}{\cancel{3}} = \frac{52}{40} = \frac{26}{20} = \frac{13}{10} = 1{,}3$$

$$\boxed{\text{Ответ: на } 30\%}$$