МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лисок Артём Александрович**

Класс: **6**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Лисок Артём Александрович

Класс: 6

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
5 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

11 Чернови лист №:

111111 | 37
111 | 3003
111
111
0

1005 | 13
91
95
1005

2020 = 2 · 2 · 5 · 101
2018 = 2 · 1009
2014 = 2 · 1007

2 · 1010
2 · 1009
2 · 1007

819

7 · 9 · 13 = 819

16 + 2 + 8 =

91

20174

× 63
13
189
63
819

909
90

26

20 · 19 · 18 / 6

2014 | 13
13
71
65
64

20 · 19 · 3

380 · 3 =

1140

1 · 1/2 · 1/3

1/6

2280

25

100

101

2018

7 · 9 · 13

2020 · 2018 · 2014

5 – 2009
5 – 5
2007

2007 + 5 =
6 – 2
2016
2027

20 + 15 + 13 + 17 + 16 + 15 + 14

× 16
16
256

25/256

100/1024

2019/2

1/1024

819

11 · 12 / 2 = 66

18 · 16 · 12 + 7 · 9 · 13

20 · 19 / 2

100/1024

2027 – 7
2020
2018 – 9

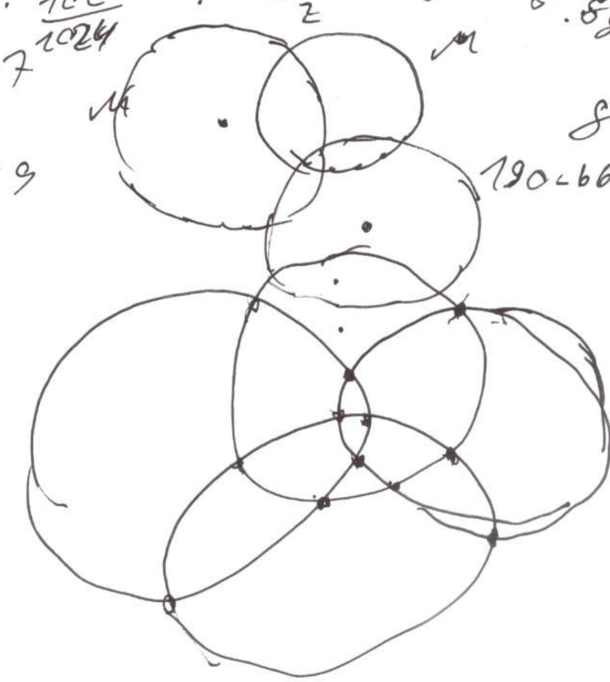
453

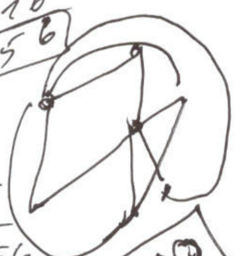
190 – 66 = 124

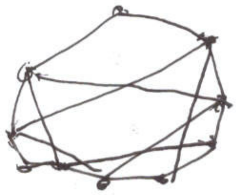
× 216
16
1296
216
3456

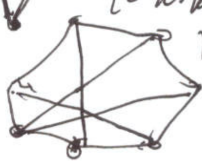
18 · 12 · 16

× 18
12
36
18
216









Задача 6. Чистовик лист №4.

Умножим ~~числа~~ число $n = \frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\ldots \cancel{на} \cdot \frac{1022}{1023}$ на $\frac{101}{102}\cdot\frac{103}{104}\cdot\ldots\cdot\frac{1023}{1024}$, т.е. число n мы умножили на число $> n$ и $n > 0$ ($\frac{101}{102} > \frac{100}{101}$, $\frac{103}{102} > \frac{102}{101}\ldots$) и получили что $n^2 < \frac{100}{1024}$, ведь $n\cdot n < n\cdot(n+k)$ $\left(n+k = \frac{101}{102}\cdot\frac{103}{104}\cdot\ldots\cdot\frac{1023}{1024}\right)$ и

$\frac{100}{101}\cdot\frac{101}{102} = \frac{100}{102}$, $\frac{100}{102}\cdot\frac{102}{103} = \frac{100}{103}, \ldots \frac{100}{1023}\cdot\frac{1023}{1024} = \frac{100}{1024}$ и $\left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{25}{256} = \frac{25\cdot 4}{16^2\cdot 4} = \frac{100}{1024} \Rightarrow \left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{100}{1024}$, ~~а~~ $n^2 < \frac{100}{1024}$ и $\frac{5}{16} > 0$, и $n > 0 \Rightarrow \frac{5}{16} > n$

Ответ: $\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1022}{1023} < \frac{5}{16}$.

Задача 5 Чистовик Лист N: 3.

пока знакомств $99+11=110$ и $+99$, ведь не тогс ону знаком их знаком тоже, но в сумме $198<202$, а не менее собой не могут быть знакомы => эти 11 знаком не всех остальных. То осталось 8 человек которые могут знать максимум 18 человек Заметим что если двое из этих 8 знакомы, то с 11 человек они в сумме знакомы не более 1 раза с каждым, ведь иначе эти 2 и он образуют Х. группу. То выгоднее всего чтобы среди этих 8 пар по знакомым не было, но мы это разобрали, а тогда рукопожатий не более 100, а для 100 есть пример

Ответ: 100 рукопожатий.

Задача 2.

Рассмотрим остаток N на 2027. 2020 на 2027 имеет остаток -7, 2018 имеет остаток -9, и 2014 имеет остаток -13, а 7, 9, 13 имеют остатки 7, 9, 13 соответственно. $2020\cdot2018\cdot2014$ имеют такой же остаток что и имеет $(-9)\cdot(-7)\cdot(-13)$, всё остальное : 2027.

($~~A+x~~$ $(n\cdot2027+x)\cdot(a\cdot2027+5)=2027\cdot(an+a+n)+as$ и для трёх способов тоже самое), то N даёт остаток на 2027 равный $13\cdot9\cdot7+-(7\cdot9\cdot13)=0$ => $N\,\vdots\,2027$ и $N>2027$ => оно составное (N)

Ответ: составное

Задача № 7. Чистовик лист №2

Пусть мальчики это точки на рис. 2, чтобы число девочек было максимально, круги радиуса 5 в этих точках (мальчиках) должны пересекаться попарно и 2 раза, но не должно быть пересечений в одной точке и ~~и~~-девочка, т.к. у нас между любыми 2 мальчиками ~~стоит~~ надрес., 2 и только 2 девочки, а 2 круга не могут пересекаться в более 2 точках => максимальное кол-во девочек все возможные пары мальчиков · 2 (без ~~повторений~~ (x, y) и (y, x)), то всего максимальное кол-во девочек 5 · 4 = 20 и для 20 есть пример.

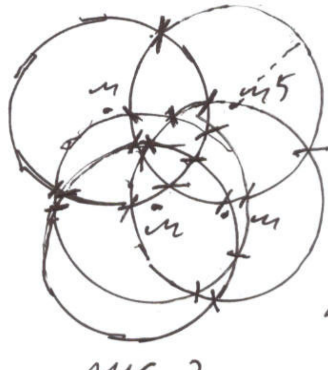


рис. 2.

Ответ: 20

Задача 5.

Приведём пример для 100 рукопожатий: 10 первых знают всех 10 вторых, но ни 10 первых, ни 10 вторых друг друга не знают, то каждый знает 10 человек => у нас $\frac{20 \cdot 10}{2}$ рукопожатий, а $20 \cdot 10 : 2 = 100$. Максимум у нас $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ рукопожатий.

Пусть можно сделать 101 рукопожатие, то всего знакомых ≥ 202 (А знает В и В знает А разные), то по принципу Дирихле один знает хотя бы 11 человек => эти 11 человек друг друга не знают.

Рукопожатий уже максимум $190 - \frac{11 \cdot 10}{2} = 135$. Если один знает хотя бы 15, то рукопожатий максимум $190 - \frac{15 \cdot 14}{2} = 85$. Если один знает хотя бы 14, то максимум $190 - \frac{14 \cdot 13}{2} = 99$ => ничто не знает 14 человек. Если один знает 11 человек, то они знают максимум 9: его и всех тех кого он не знает) => ~~хотя знакомых~~

Задача 1. Чистовик лист №:1

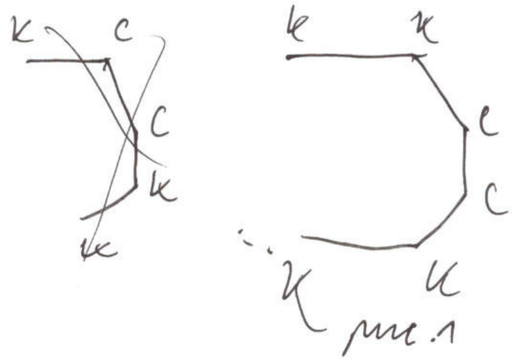


рис. 1

Рассмотрим как на рис. 1 вначале 2 красных, потом 2 синих, 2 красных, 2 синих вершины и т.д., то в нас таких пар 111 и в каждой паре 1 ребро одноцветное, не одноцветных 111, а значит разноцветных 111 ребер.

Ответ: да

Задача 3.

Пусть обычно он едет ~~полных~~ n минут со скоростью x, то

~~$nx-35=(n+10)x$~~ $n-75=\frac{nx}{x+\frac{3}{5}x} \Rightarrow \frac{nx}{x}-75=\frac{nx}{\frac{8}{5}x} \Rightarrow n-\frac{n}{\frac{8}{5}}=75 \Rightarrow 8n-5n=25\cdot 8 \Rightarrow$

$3n=75\cdot 8 \Rightarrow n=25\cdot 8=200$ минут. Значит он обычно едет 200 минут.

Теперь он едет $\frac{4}{5}\cdot 200 \Rightarrow$ его скорость должна быть $\frac{5}{4}\cdot x \Rightarrow$ он должен увеличить скорость на 25%.

Ответ: на 25%.

Задача 4.

На последнем месте каждое число побывает 8^5 раз, ведь на 5 первых мест можно ставить любые из 8 чисел всего $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$ различных вариантов. То сумма единиц $36\cdot 8^5$ ($36=1+2+3+4+5+6+7+8$). На 2 месте $36\cdot 8^5\cdot 10$ ..., на третьем $36\cdot 8^5\cdot 100$, в сумме $36\cdot 8^5\cdot 111111$ ~~$36\cdot 8^5$ не~~ НОД(36,37)

НОД$(8^5,37)=1 \Rightarrow 111111 \vdots 37$, ведь $111111=37\cdot 3003$, а значит сумма 6-значных чисел, не содержащих 0 в десятичной записи $\vdots 37$.