**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Служак Григорий Алексеевич**

Класс: **8**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Служак Григорий Алексеевич

Класс: 8

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Задача 6** | **Задача 7** | **Сумма*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 баллов | 15 баллов | 10 баллов | 0 баллов | 15 баллов | 0 баллов | 15 баллов | 70 баллов |

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

№1 з клетки 1

$7 \cdot 9 \cdot 13 = 819$ ~~819 и 8209789040~~ взаимно прост

$2020 \cdot 2018 \cdot 2014 = 4076360 \cdot 2014 = 8209789040$

$7 \cdot 9 \cdot 13 + 2020 \cdot 2018 \cdot 2014 = 8209789859$

$8209789859 \not\vdots\ 2; 3; 5; 7; 13, 19, 53, 101, 1009$ (все простые делители чисел 7, 9, 13, 2020; 2018, 2014)

проверив все простые до 100 получим что оно делится на 61, получается 134586719

$\Downarrow$

оно составное

№2

Пусть обычно он едет $t$ минут со скоростью $V$ $S = Vt$. Если $V_1 = 1{,}6V$, то

$$t_1 = \frac{S}{1{,}6V} = \frac{t}{1{,}6} = \frac{5}{8}t$$

$$t = 40 + \frac{5}{8}t + 25$$

$$\frac{3}{8}t = 65$$

$$t = \frac{520}{3} \text{ мин}$$

$$t_2 = \frac{520}{3} - 40 = \frac{400}{3} \text{ мин}$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{400}{520}$$

$$V_1 = \frac{520V}{400} = 1{,}3V$$

Ответ: на 30% надо было увеличить $V$

№3

Пусть у нас есть 3 числа:

$\overline{1abcde}$ $\overline{2abcde}$ ... $\overline{3abcde}$ их сумма

$= 36\cdot 100000 + 5\cdot\overline{abcde}$. ~~II~~ Чисел вида $\overline{1abcde}$ — $8^5$. то есть сумма чисел в $i$ разряде (единиц ~~нулевых~~ — нулевых, ~~первых~~ · сотни тысяч — пятых) равны $10^i\cdot 36\cdot 8^5$

Общая сумма — $(10^5+10^4+10^3+10^2+10^1+10^0)\cdot 36\cdot 8^5$

$= 111111\cdot 36\cdot 8^5 = 37\cdot 3003\cdot 36\cdot 8^5$

ч.т.д.

Теорема Турана: если в графе на V вершинах нет n-вершинного подграфа, то максимальное количество вершин в нём равно:

$$\frac{(n-2)(V^2-r^2)}{2n-2} + \frac{r(r-1)}{2}, \text{ где } V \equiv_{n-1} r.$$

Общая теорема нас не интересует, докажем только для $n=3$. Остатки при делении $V$ на $n-1=2$ могут быть либо 1, либо 0. Но тогда $\frac{r(r-1)}{2}=0$. Итого нам нужно доказать, что максимальное количество рёбер – $\frac{V^2-r^2}{4}$. Для $V=1$ и $V=2$ это очевидно так (0 рёбер и 1 ребро). Далее индукция по кол-ву рёбер в $V$. Пусть эта формула верна для $V$. Докажем для $V+2$. Если у нас нет рёбер, то этот случай очевиден. Иначе возьмём ребро. К его концам примыкают не более $V$ рёбер (не более 1 ребра из каждой из оставшихся вершин), потому что в графе не может быть треугольника. Для оставшихся $V$ вершин применяем предположение

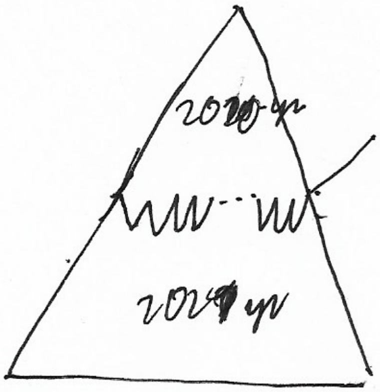
~~Для~~ индукции получаем, что среди них не более $\frac{v^2-r^2}{4}$ ~~пришло~~ при $n=3$ $r$ от $v$ и $r$ от 4 одинаковы, а всего их не более $\frac{v^2-r^2}{4}+v+1=\frac{(v+2)^2-r^2}{4}$.

~~Для~~ Как строить пример — ~~~~

можно каждый раз добавлять к $v$ вершинам 2 вершины соединенные ребром, проводить от каждой из $v$ вершин к одной из двух по ребру и получится граф на $v+2$ вершины. Пусть из 2 можно получить пример на 20. ~~~~ В нем ребер не больше чем $\frac{20^2-0^2}{4}=\frac{400}{4}=100$

№ 7

Пример:




2016 – зимняя [illegible]
[illegible]