МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кубанов Алексей Алексеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Кубанов Алексей Алексеевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	80 баллов

N1

{Чистовик} (1)

В последовательности будет 80 двухзначных чисел, а значит, число 100 начнётся с 161 цифры последовательности. Далее будут идти трёхзначные числа, и число $(100+k)$ начинается с $(161+3k)$-ой цифры.

Заметим, что $2021=161+3\cdot 620$, а значит, число $100+620=720$ начинается с 2021 цифры последовательности. То есть, 2021 цифра — 7.

Ответ: 7

N2

$|x|-\arcsin x+b\cdot(\arccos x+|x|-1)+a=0.$

Чтобы ур-е имело корни при любом значении b, необходимо, чтобы ур-е имело корни при $b=-1$.

$\underline{b=-1}$: $1-(\arcsin x+\arccos x)+a=0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1-\frac{\pi}{2}+a=0 \\ x\in[-1,1] \end{cases}$$ Очевидно, корни имеются только при $\underline{a=\frac{\pi}{2}-1}$.

Докажем, что $a=\frac{\pi}{2}-1$ действительно удовлетворяет условию, т.е., при любом b исходное ур-е имеет хотя бы один корень. Явно укажем его: $x=1$ — решение при любом значении b. Действительно,

$$|1|-\arcsin 1+b\cdot(\arccos 1+|1|-1)+a=$$
$$=1-\frac{\pi}{2}+b\cdot(0+1-1)+a=1-\frac{\pi}{2}+a\xrightarrow{a=\pi/2-1}0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.

N3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$ {Чистовик} (2)

Сделаем замену $t=x^2$. Из ОДЗ $\lg(-)$ следует, что $t>3$, а значит, любой корень по t соответствует ровно двум корням по x.

$$2^{\lg(t-3)} = (t-2)\lg 2$$

$\downarrow \lg(\ )$ (на ОДЗ обе части строго положительны)

$$\lg(t-3)\cdot\lg 2 = \lg(t-2) + \lg\lg 2$$

$$\underbrace{\lg(t-3)\cdot\lg 2 - \lg(t-2)}_{f(t)} = \lg\lg 2$$

Рассмотрим левую часть как ф-цию от t и проанализируем её.

$$f'(t) = \frac{\lg 2}{\ln 10}\cdot\frac{1}{t-3} - \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{t-2} \sim$$ (символ „$\sim$" обозначает „имеет тот же знак, что и...")

$$\sim \frac{\lg 2}{t-3} - \frac{1}{t-2} = \frac{t\cdot\lg 2 - 2\lg 2 - t + 3}{(t-3)(t-2)} \sim -(1-\lg 2)t + 3 - 2\lg 2$$

и Т.к. $0<\lg 2<1$, f' убывает отн. t. При $t=3$ $f'(3)=\lg 2>0$, а значит, ф-ция f имеет единственную точку максимума

$$t_0 = \frac{2\lg 2 - 3}{\lg 2 - 1} = 2 + \frac{1}{1-\lg 2}.$$

$$f(t_0) = \lg 2\cdot\lg\left(\frac{1}{1-\lg 2} - 1\right) - \lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}\right)$$

{Чистовик}

(3)

Определим знак числа $\lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}-1\right)$.

$$\lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}-1\right) \vee 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{1-\lg 2}-1 \vee 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\lg 2}{1-\lg 2} \vee 1 \iff 2\lg 2 \vee 1 \iff \lg 4 \vee 1, \text{ а } \lg 4 < \lg 10 = 1.$$

Значит, $\lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}-1\right) < 0$.

Поэтому $f(t_0) = \lg 2 \cdot \lg\left(\frac{\lg 2}{1-\lg 2}\right) - \lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}\right) > 1 \cdot \lg\left(\frac{\lg 2}{1-\lg 2}\right) - \lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}\right) =$

$= \lg\lg 2$.

Итак, возвращаясь к изначальному ур-ю: $f(t) = \lg\lg 2$, мы получили, что значение f в её единственной точке максимума превосходит $\lg\lg 2$.

Осталось заметить, что $\lim\limits_{t\to 3^+} f(t) = -\infty$, и $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left[(\lg 2 - 1)\lg t\right] = -\infty$

Значит, в силу непрерывности f мы имеем один корень на $(3, t_0)$ и один корень на $(t_0, +\infty)$ — всего два корня по $t \iff 4$ корня по x.

Ответ: 4

№4 {Чистовик} (4)

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases} \xrightarrow{\alpha=2x,\ \beta=3y,\ \gamma=z} \begin{cases} \alpha-\beta+\frac{6}{\alpha\beta}=6 \\ \gamma-\alpha+\frac{2}{3\alpha\gamma}=\frac{2}{3} \\ \beta-\gamma+\frac{3}{2\beta\gamma}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Заметим, что если перенести дробные выражения в правые части ур-ий системы, то получится, что верно следующее: (символ '$\sim$', как и в прошлой задаче, обозначает равенство знаков двух выражений):

$$\begin{cases} \alpha-\beta\sim 1-\frac{1}{\alpha\beta} \\ \gamma-\alpha\sim 1-\frac{1}{\alpha\gamma} \\ \beta-\gamma\sim 1-\frac{1}{\beta\gamma} \end{cases}$$

Будем работать с этим следствием из изначальной системы. Для начала, докажем, что все переменные обязаны быть одного знака. Так как любая перестановка (α,β,γ) может лишь поменять знак выражений в левой части записанной системы и может быть представлена в виде композиций элементарных перестановок, любая перестановка (α,β,γ) не меняет наличие решений системы ~~кол-во решений~~. ~~Докажем, что если (α,β,γ) решение, то (α,γ,β) - тоже решение, для любой системы~~. Действительно, это следует из того, что если (α,β,γ) - реш., то $(-\alpha,-\gamma,-\beta)$ - тоже решение, а любую другую перестановку можно представить как композицию элементарных.

Это доказывает, что мы можем как угодно упорядочивать α,β,γ, и, если у полученной системы нет решений, то и у исходной нет решений. То же верно и для смены знаков всех чисел.

Итак, пускай все переменные не одного знака, тогда БОО $\alpha,\beta>0$, $\gamma<0$.

$\alpha\gamma<0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\alpha\gamma}>0$, а $\gamma-\alpha\sim 1-\frac{1}{\alpha\gamma} \Rightarrow \gamma>\alpha$. Противоречие.

Пускай теперь среди α,β,γ нет равных чисел. Тогда БОО $\alpha>\beta>\gamma>0$.

$\alpha-\beta>0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\alpha\beta}>0 \Leftrightarrow \alpha\beta>1$; $\gamma-\alpha<0 \Rightarrow 1-\frac{1}{\alpha\gamma}<0 \Leftrightarrow \alpha\gamma<1$,

$\beta - \gamma > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\beta\gamma} > 0$ {Чистовик}

$\Updownarrow$

$\beta\gamma > 1.$

Получили, что $\alpha\gamma < 1$ и $\beta\gamma > 1$. Отсюда следует, что $\beta > \alpha$, что противоречит предположению.

Итак, мы доказали, что все числа системы обязаны быть одного знака и среди них есть хотя бы два равных между собой числа.

Вернёмся к изначальной системе. Если $\alpha = \beta$, то $\frac{6}{\alpha^2} = 6 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \pm 1$. Подставим $\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{cases} \gamma - 1 + \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ 1 - \gamma + \frac{3}{2\gamma} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

~~Если $\gamma > 1$, то, очевидно, второе ур-е системы не выполнено.~~
~~Если $\gamma < 1$, то тоже второе ур-е не выполнено.~~

$$\begin{cases} \gamma - 1 + \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ 1 - \gamma + \frac{3}{2\gamma}(1-\gamma) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma - 1 + \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ (1-\gamma)\left(1 + \frac{3}{2\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

При $\gamma = 1$ первое ур-е выполн.

При $\gamma = -\frac{3}{2}$ первое ур-е не вып.

Значит, при $\alpha = \beta = 1$ $\gamma = 1$.

Подставим $\alpha = \beta = -1$:

$$\begin{cases} \gamma + 1 - \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ -1 - \gamma - \frac{3}{2\gamma} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma + 1 - \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2\gamma}(\gamma + 1) + \gamma + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma + 1 - \frac{2}{3\gamma} = \frac{2}{3} \\ \left(\frac{3}{2\gamma} + 1\right)(\gamma + 1) = 0 \end{cases}$$

При $\gamma = -1$ первое ур-е выполн., при $\gamma = -\frac{3}{2}$ первое ур-е не выполнено.

Значит, при $\alpha = \beta = -1$ $\gamma = -1$

Аналогично при рассмотрении случаев равенства других двух переменных получаем, что $\alpha = \beta = \gamma = \pm 1$.

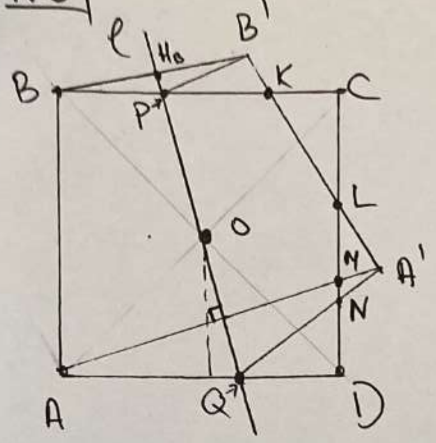
Значит, $\begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{3} \\ z = \pm 1 \end{cases}$, где знаки согласованы.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1\right)$

N5

{Чистовик}

6



(500)

Пускай прямая сгиба ℓ пересекает стороны квадрата AD и BC именно так, как показано на рисунке. Тогда если A' и B' - точки, симметр. A и B отн. ℓ, получившаяся после склейки фигура - $PB'KCLA'NQ$.

$S(\text{фигуры}) = S(PCDQ) + S(\triangle LNA') + S(\triangle PB'K)$, а $S(PCDQ) = \frac{1}{2} S(ABCD) = \frac{17}{2}$, значит, нужно максимизировать сумму площадей треуг-ков

№3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2} = (x^2-2)\cdot\lg 2$$

$t = x^2 \geqslant 0$

$\underline{t > 3}.$

Любое реш. по t даёт два реш. по x.

$$2^{\lg(t-3)} = (t-2)\lg 2$$

$$\lg(t-3)\cdot\lg 2 = \lg(t-2) + \lg\lg 2.$$

$$\underbrace{\lg(t-3)\cdot\lg 2 - \lg(t-2)}_{f(t)} = \lg\lg 2$$

$$f'(t) = \frac{\lg 2}{\ln 10}\cdot\frac{1}{t-3} - \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{t-2} \sim$$

$$\sim \frac{\lg 2}{t-3} - \frac{1}{t-2} = \frac{(\lg 2)t - 2\lg 2 - t + 3}{(t-3)(t-2)} \sim$$

$$\sim \boxed{-(1-\lg 2)t + 3 - 2\lg 2} =$$

$t=3$

$$t_0 = \frac{2\lg 2 - 3}{\lg 2 - 1} = 2 - \frac{1}{\lg 2 - 1} = 2 + \frac{1}{1-\lg 2}$$

$$-3 + 3\lg 2 + 3 - 2\lg 2 = \lg 2$$

$$f(t_0) = \lg\left(\frac{1}{1-\lg 2} - 1\right) - \lg\left(\frac{1}{1-\lg 2}\right)$$

N5

$f(t_0) \vee \lg 2$

B: $\dfrac{\dfrac{1}{1-\lg 2}-1}{\dfrac{1}{1-\lg 2}} \vee \lg 2$

A: $\dfrac{1-1+\lg 2}{1} \vee \lg 2$

$=$ ⇒ <u>один корень по t</u> → два корня по x

0 (

N4

x

$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3 \end{cases} \to \begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6 \\ z-2x+\dfrac{1}{3xz}=2/3 \\ 3y-z+\dfrac{1}{2yz}=3/2 \end{cases}$$

$\alpha=2x$
$\beta=3y$
$\gamma=z$

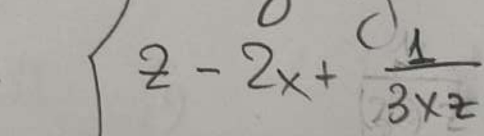
$$\left\{\begin{array}{l|l} \alpha-\beta+\dfrac{6}{\alpha\beta}=6 & 1 \\ \gamma-\alpha+\dfrac{2}{3\alpha\gamma}=2/3 & 9 \\ \beta-\gamma+\dfrac{3}{2\beta\gamma}=3/2 & 4 \end{array}\right. \to \begin{cases} \alpha-\beta+\dfrac{6}{\alpha\beta}=6 \\ 9\gamma-9\alpha+\dfrac{6}{\alpha\gamma}=6 \\ 4\beta-4\gamma+\dfrac{6}{\beta\gamma}=6 \end{cases}$$

$y=\alpha+\dfrac{6}{\alpha}$

$f(\alpha)=\alpha-\beta+\dfrac{6}{\alpha\beta}$

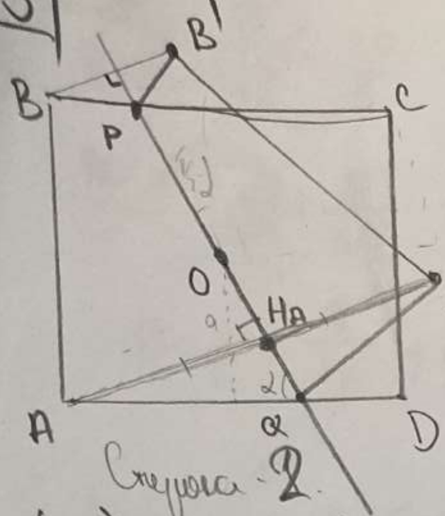
$f'(\alpha)=1-\dfrac{6}{\alpha^2\beta}=0$

$\alpha^2=\beta/6$



$\alpha+\dfrac{6}{\alpha}=7$ $\quad\sqrt{\dfrac{\beta}{6}}-\beta+\dfrac{6}{\sqrt{\frac{\beta}{6}}\cdot\beta}=6$

N5



Сторона $x b \cdot -2a$

$AQ = a\,ctg\alpha + a$

$AH_A = AQ\sin\alpha = a(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$O(0,0)$, $A(-1,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$, $D(1,-1)$.

$tg\alpha \cdot x + y = 0$

$l: y = tg(\pi - \alpha)\cdot x \Leftrightarrow y + tg\alpha\, x = 0 \to \vec{n}_l = \{tg\alpha, 1\}$

$AA': \begin{cases} x = -1 + tg\alpha \cdot t \\ y = -1 + t, \; t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\cancel{\frac{6}{\alpha\beta} + \frac{2}{3\alpha\gamma} = \frac{20}{3}}$

$\cancel{\frac{20}{3}\alpha = \frac{6}{\beta} + \frac{2}{3\gamma}}$

$\gamma - \beta + \frac{6}{\alpha\beta} + \frac{2}{3}$

$10\alpha - \beta - 9\gamma = 6 \cdot \frac{\beta - \gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$\underbrace{2x - 3y + \frac{1}{xy}}_{\downarrow\downarrow \text{ отн. } y} = 6$

$9(\gamma - \alpha) = 6\left(1 - \frac{1}{\alpha\gamma}\right)$

$\alpha\gamma > 1 \Rightarrow \gamma > \alpha$.

$y = -\frac{2}{3x}$: $\underbrace{2x + \frac{2}{x}}_{\geq 4} - \frac{3}{2} = 6$

$\alpha - \beta = 6\left(1 - \frac{1}{\alpha\beta}\right)$ $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma > 0$

$\alpha > \beta$
$\beta > \gamma$ Прот.

$y = -\frac{k}{x}$:

$0 > 9(\gamma - \alpha) = 6\left(1 - \frac{1}{\alpha\gamma}\right)$

~~$\alpha = 1, \beta = 1$ - корх.~~ $\alpha = \beta = \gamma = 1$ - корх.

$\alpha\beta > 1 \iff \alpha > \beta$

$\cancel{(\alpha - 1) - (\beta - 1)} + \frac{6}{\alpha\beta} - 6 = 0$

$\alpha > \beta > \gamma$

$(\alpha + 1) - (\beta + 1) + \frac{6}{\alpha\beta} - 6 = 0$

$\alpha\beta > 1$
$\beta\gamma > 1$
$\alpha\gamma < 1$ Прот.

$\beta \downarrow\downarrow \Rightarrow$ I $\uparrow\uparrow \Rightarrow \alpha \downarrow\downarrow$, чтобы сохр. рав-во

$\alpha \downarrow\downarrow \Rightarrow$ II $\uparrow\uparrow \Rightarrow$

N 1)

$99-20+1=80$ чисел двузн. $\to$ 160 цифр $\Rightarrow$ ~~161~~

Далее идут трёхзнач. числа. Число 100 нач. с 161 цифры, 101 - с 164, ...

$\cancel{\frac{2021-160}{3}} = \cancel{\frac{1921-60}{3}} =$

Число $100+k$ нач. с $161+3k$ цифры

$161+3k=2021$

$3k=1921-61=1860$

$k=620$

Число 720 нач. с 2021 цифры

Ответ: 7.

N2)

~~$|x|-\arcsin x+a$~~ $|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+a=0$

$b=-1$. $|x|-\arcsin x-\arccos x-|x|+1+a=0$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}-1=a \\ x\in[-1,1] \end{cases}$$

$b=0$. $|x|-\arcsin x+\overset{\pi/2-1}{a}=0$

$|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+\frac{\pi}{2}-1=0$

$\boxed{x=1}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$

a) $$\begin{cases} \alpha - \beta = 6\cdot\left(1 - \dfrac{1}{\alpha\beta}\right) = 6\cdot\left(\dfrac{\alpha\beta\gamma - \gamma}{\alpha\beta\gamma}\right) \\ 9\gamma - 9\alpha = 6\cdot\left(1 - \dfrac{1}{2\gamma}\right) = 6\cdot\left(\dfrac{\alpha\beta\gamma - \beta}{\alpha\beta\gamma}\right) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$10\alpha - \beta - 9\gamma = 6\cdot\frac{\beta - \gamma}{\alpha\beta\gamma}$$

$$\cancel{\alpha - \beta = 6\cdot \alpha\beta\gamma - \gamma}$$

$$\frac{6}{\alpha\beta} + \frac{2}{3\alpha\gamma} + \frac{3}{2\beta\gamma} = \frac{13}{6}$$

$$36\gamma + 4\beta + 9\alpha = 13\alpha\beta\gamma$$

$$(\alpha - \beta)\alpha\beta = 6(\alpha\beta - 1)$$

$$(\alpha - \beta - 6)\alpha\beta = -6$$

$$\begin{cases} \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + 6 = 6\alpha\beta \\ 3\alpha\gamma^2 - 3\alpha^2\gamma + 2 = 2\alpha\gamma \\ 2\beta^2\gamma - 2\beta\gamma^2 + 3 = 3\beta\gamma \end{cases}$$

$$\alpha = \beta + 6 - \frac{6}{\alpha\beta}$$

$$\alpha^2 = \alpha\beta + 6\alpha - 6/\beta \qquad D = \beta^2 + 12\beta + 36 - \frac{24}{\beta}$$

$$\alpha^2 - (\beta + 6)\alpha + 6/\beta = 0$$