МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Полякова Виктория Кирилловна**

Класс: **8**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Полякова Виктория Кирилловна

Класс: 8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Задача 7**	**Сумма***
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	0 баллов	15 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

Черновик.

Пусть $v\frac{км}{ч}$ - обычная скорость Ивана Семёновича, тогда t ч - обычное время, за которое он доходит до работы. Найдём расстояние от дома до работы: vt (км).

После того как И.С. проспал и выехал на 60 минут позже, можно сказать, что в пути он находился на $65 = \frac{12}{13}$ часа меньше. Тогда:

$$vt = 1{,}6v\left(t - \frac{12}{13}\right)$$

$$t = 1{,}6t - \frac{26}{\cancel{15}}$$

$$t = \frac{26}{3}$$

Что бы приехать ровно 9:00, он должен увеличить скорость на $p\%$, тогда:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)v$$

$$\frac{26}{3} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{20}{3}$$

$$1 + \frac{p}{100} = \frac{13}{10}$$

$$p = 30\%$$

8

Черновик.

Найдём сумму цифр разряда единиц. Т.к. каждая цифра входит в 5! чисел, то сумма цифр в разряде единиц будет:

$$5!\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=36\cdot 5!$$

Аналогично в остальных разрядах. Из этого получаем

$$36\cdot5!+36\cdot5!\cdot10+36\cdot5!\cdot100\ldots 36\cdot5!\cdot10000000=$$

$$=36\cdot5!\cdot11111111;$$

Черновик.

Пусть $A=\frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023}$

Рассмотрим $B=\frac{101}{102}\cdot\frac{103}{104}\cdot\ldots\cdot\frac{1021}{1022}\cdot\frac{1023}{1024}$

Т.к. $\frac{101}{102}>\frac{100}{101}$; $\frac{103}{104}>\frac{102}{103}$; ... ; $\frac{1023}{1024}>\frac{1022}{1023}$, то $B>A$

Однако $A\cdot B=\frac{100}{101}\cdot\frac{101}{102}\cdot\ldots\cdot\frac{1022}{1023}\cdot\frac{1023}{1024}=\frac{100}{1024}=\frac{25}{256}$

Отсюда

$$A<B<=>A^2<AB=\frac{25}{256}$$

$$A<\frac{5}{16}$$

Первое число меньше

7

Чистовик №5.

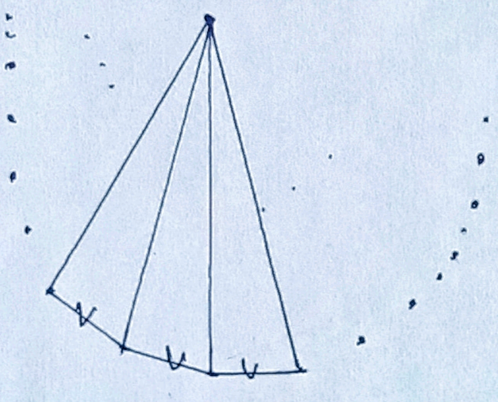
№6

Обозначим джентльменов точками на плоскости. Всего максимум рукопожатий $\frac{20 \cdot 15}{2} = 150$

Пусть все джентльмены знакомы друг с другом. Дружбу будем обозначать отрезком соединяющим две точки; по условию задачи не должно быть треугольников. Для этого уберём минимальное число отрезков, чтобы не оказалось треугольников, а именно 20 «внешних» сторон (отмечены галочками)

Остаётся $150 - 20 = 170$ отрезков, никакие 3 из которых не образуют треугольник.

Максимум рукопожатий 170.



Ответ: 170

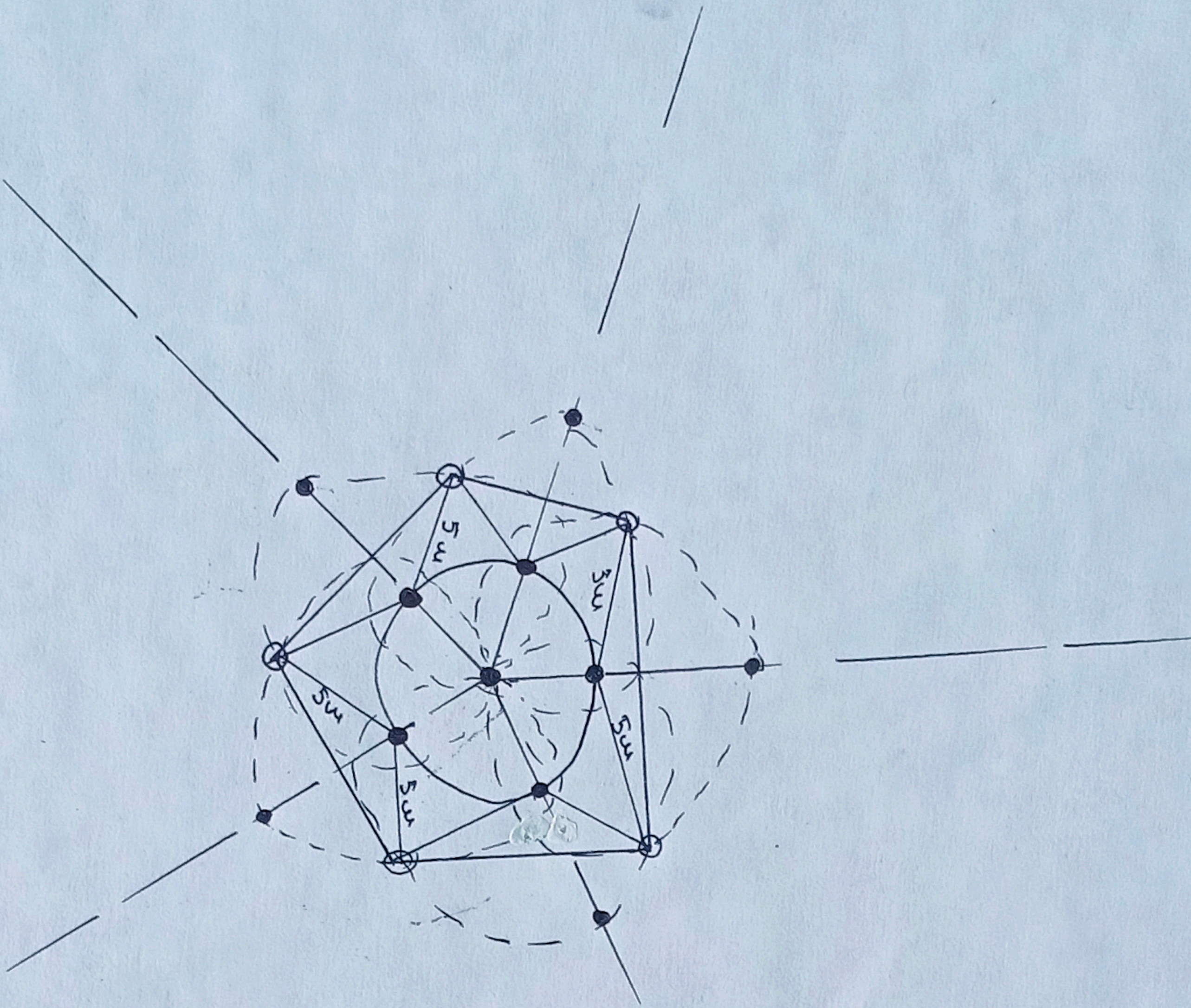


Рисунок к 6 задаче

Чистовик №4

№6

Рассмотрим девочку и построим окр-ть с центром в „девочке". Заметим, что мальчики образуют хорду в этой окружности. Т.к. с одной хордой могут быть только две окружности, то каждой паре мальчиков соответсвуют две девочки. Тогда всего не более 10 девочек.

Пример изображения ниже (пустые - мальчики чёрные девочки)

Мальчики в вершинах прав. 5-угольника, 5 девочек внутри окружности радиуса меньше 5, снаружи 5 девочек симметрично относ. сторон 5-уг.

Чистовик №3

№3

Найдём сумму цифр разряда единиц. Т.к. каждая цифра входит в 5! чисел, то сумма цифр в разряде единиц будет

$$5!(1+2+3+4+5+6+7+8) = 36\cdot 5!$$

Аналогичное утверждение в остальных разрядах. Тогда искомая сумма чисел равна:

$$36\cdot 5! + 36\cdot 5!\cdot 10 + 36\cdot 5!\cdot 100 + \ldots + 36\cdot 5!\cdot 1000000 =$$

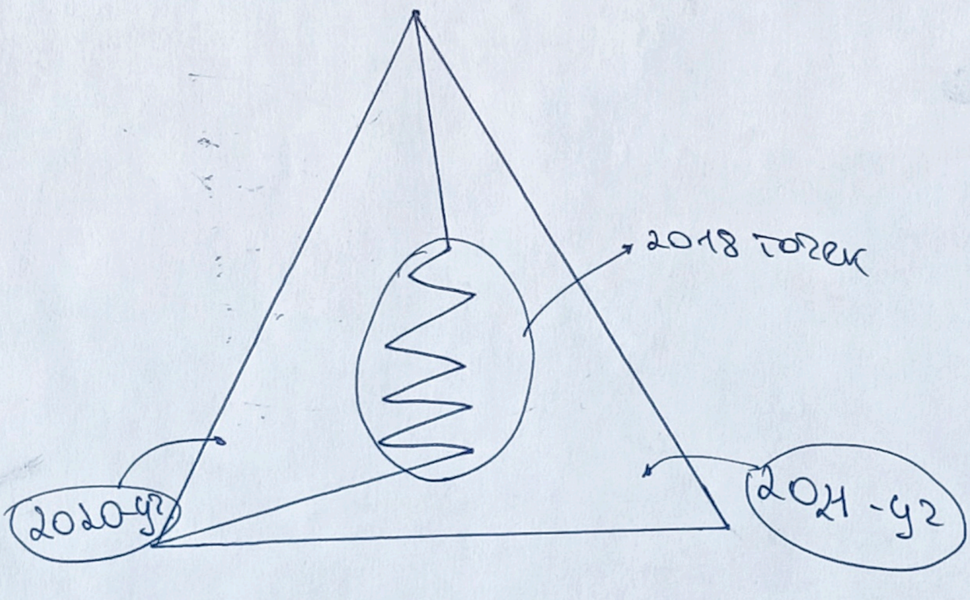
$$= 36\cdot 5!(1+10+100+\ldots+1000000) = 36\cdot 5!\cdot 1111111.$$

Т.к. 1111111 кратно 37 ($1111111 = 37\cdot 3003003$), то сумма всех указанных 6-значных чисел (без цифр 0 и 9) кратна 37.

Ответ: доказано.

№7.

Да, пример:



Чистовик №2.

№2 Пусть $v\ \frac{км}{ч}$ - обычная скорость Ивана Семёновича, тогда t ч - время в пути. Тогда расстояние от дома до работы составляет (vt) км

После того как он проспал и вышел на 40 минут позже обычного, получим, что в пути он находился на 65 мин $= \frac{13}{12}$ часа меньше. Тогда:

$$vt = 1{,}6v \cdot \left(t - \frac{13}{12}\right)$$

$$t = 1{,}6t - \frac{26}{15}$$

$$\frac{3}{5}t = \frac{26}{15}$$

$$t = \frac{26}{9}$$

Что бы приехать ровно в 9:00 он должен увеличить скорость на $p\%$, т.е. ехать со скоростью $\left(1+\frac{p}{100}\right)v\ \frac{км}{ч}$, Тогда.

$$vt = \left(1+\frac{p}{100}\right)v\left(t-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{26}{9} = \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(\frac{26}{9}-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{26}{9} = \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{20}{9}$$

$$1+\frac{p}{100} = \frac{13}{10}$$

$$p = 30.$$

Значит, скорость надо увеличить на 30%.

Ответ: 30%

Чистовик №1

№1.

$N = 7\cdot 9\cdot 13 + 2014\cdot 2020\cdot 2018$

Запишем число в виде:

$N = a(a+2)(a+6) + b(b+4)(b+6)$; $a=7$ $B=2014$

Тогда $N = a^3+8a^2+12a+b^3+10b^2+24b = a^3+a^2b-ab^2-a^2b+2a^2+$
$+2ab+ab^2+b^3+4ab+4b^2-6ab+6a^2+12+6b^2+24b=$
$=a^2(a+b)-ab(a+b)+2a(a+b)+b^2(a+b)+4b(a+b)-6(a^2-ab+2a+b^2+$
$+4b)=(a+b)(a^2-ab+2a+b^2+4b)+6(a^2-ab+2a+b^2+4b)=$
$=(a+b+6)(a^2-ab+2a+b^2+4b)$

Из этого делаем вывод, что N делится на $a+b+6=$
$=7+2014+6=2027$, т.е. не является простым числом.

Ответ: N-составное

№4.

Пусть $A = \frac{100}{101}\cdot\frac{102}{103}\cdot\ldots\cdot\frac{1020}{1021}\cdot\frac{1022}{1023}$

Рассмотрим $B = \frac{101}{102}\cdot\frac{103}{104}\cdot\ldots\cdot\frac{1021}{1022}\cdot\frac{1023}{1024}$

Т.к. $\frac{101}{100} > \frac{100}{101}$; $\frac{105}{104} > \frac{102}{103}$; $\ldots$; $\frac{1023}{1024} > \frac{1022}{1023}$, то $B > A$

Однако

$A\cdot B = \frac{100}{101}\cdot\frac{101}{102}\cdot\ldots\cdot\frac{1022}{1023}\cdot\frac{1023}{1024} = \frac{100}{1024} = \frac{25}{256}$

Отсюда:

$A<B \Leftrightarrow A^2 < AB = \frac{25}{256}$

$A<\frac{5}{16}$

Значит, первое число меньше.

Ответ: $A<\frac{5}{16}$