МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ященко Роман Сергеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ященко Роман Сергеевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	100 баллов

(1) заметим, что двузначное число состоит из 2х цифр! Значит строка

$2021\ldots99$ состоит из $(99-20+1)\cdot2=160$ цифр

далее заметим, что трехзначное число состоит из 3х цифр! Значит строка $100101\ldots199$ состоит из $(199-100+1)\cdot3=300$ цифр

аналогично строки $200\ldots299$, ..., $600\ldots699$ состоят из 300 цифр, значит строка $202122\ldots699$ состоит из $(160+6\cdot300)=1960$ цифр

в $700701\ldots719$ состоит из $(719-700+1)\cdot3=60$ цифр, т.е. получили $1960+60=2020$. Следущая цифра будет 7, т.к. след. число 720, она и будет искомой 2021й

Ответ: 7.

чистовик

1

② пусть $x=1$, тогда $|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)+a=$

$=1-\frac{\pi}{2}+b(0+1-1)+a=1-\frac{\pi}{2}+a=0 \Rightarrow a=\frac{\pi}{2}-1.$

при $a=\frac{\pi}{2}-1$ ур-е имеет решение $x=1$ при любом b.

пусть $a\neq\frac{\pi}{2}-1$, тогда подставим $b=-1$:

$|x|-\arcsin x-\arccos x-|x|+1+a=1-\frac{\pi}{2}+a\neq 0$, т.к. $a\neq\frac{\pi}{2}-1$

Получили, что при $a\neq\frac{\pi}{2}-1$ ур-е не имеет решений, если $b=-1$, а при $a=\frac{\pi}{2}-1$ ур-е имеет решение $x=1$ при любом b.

Ответ: $a=\frac{\pi}{2}-1$.

чистовик

③ $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ о.д.з. $x^2-3>0$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot\lg 2$, по св-вам $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ и $\lg(a^b) = b\cdot\lg a$

сделаем замену $t = x^2-3$, $t>0$, тогда

$t^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$;

Слева – степенная ф-я, справа – прямая, значит имеем максимум 2 корня.

Далее покажем, что их ровно 2: подставим $t=0$, получим л.ч. $=0<\lg 2=$ п.ч.

$t=1$, получим л.ч. $=1>2\lg 2=$ п.ч.

$t=10$, получим л.ч. $=10^{\lg 2}=2^{\lg 10}=2<11\lg 2=$ п.ч.

л.ч. – левая часть
п.ч. – правая часть

Значит на интервалах $(0;1)$ и $(1;10)$ будут корни.

При обратной замене $t=x^2-3$ для каждого t получим по 2 решения x, т.к. $x^2=3+t$, а $(3+t)>0$

Ответ: 4 корня

$1>2\lg 2$, т.к. $\lg 2<\frac{1}{2}$, т.к. $\frac{1}{2}=\lg\sqrt{10}$, но $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3>2$, а $\log_{10}x=f(x)$ – монот. возр. ф-я

$2<11\lg 2$, т.к. $\lg 2>\frac{1}{4}$, т.к. $\frac{1}{4}=\lg\sqrt[4]{10}$, а $\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}<\sqrt{4}=2$, а $f(x)=\log_{10}x$ – монот. возр-я ф-я.

Черновик.

3

(4)
$$\begin{cases} 2x-3y+\dfrac{1}{xy}=6, \\ 3z-6x+\dfrac{1}{xz}=2, \\ 6y-2z+\dfrac{1}{yz}=3. \end{cases}$$

Пусть $2x=t$, $3y=l$, тогда

$$\begin{cases} t-l+\dfrac{6}{tl}=6 \ \Big|\cdot\left(\dfrac{t-l}{6}\right), \\ 3z-3t+\dfrac{2}{tz}=2 \ \Big|\cdot\left(\dfrac{z-t}{2}\right), \\ 2l-2z+\dfrac{3}{lz}=3 \ \Big|\cdot\left(\dfrac{l-z}{3}\right). \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{tl}(t-l)=\frac{1}{l}-\frac{1}{t}}$$

$$\cancel{\begin{cases} \dfrac{(t-l)^2}{6}+\dfrac{1}{l}-\dfrac{1}{t}=t-l \\ \dfrac{3(z-t)^2}{2}+\dfrac{(z-t)}{tz}=z-t \\ \dfrac{2(l-z)^2}{3}+\dfrac{(l-z)}{lz}=l-z \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(t-l)^2}{6}+\dfrac{1}{l}-\dfrac{1}{t}=t-l, \\ \dfrac{3(z-t)^2}{2}+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{z}=z-t, \\ \dfrac{2(l-z)^2}{3}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{l}=l-z. \end{cases}$$

Сложим все 3 ур-я:

$$\frac{(t-l)^2}{6}+\frac{3(z-t)^2}{2}+\frac{2(l-z)^2}{3}=0 \Rightarrow t=l,\ z=t,\ l=z,$$

т.е. $l=z=t$ (квадрат неотрицателен).

$t-l+\dfrac{6}{lt}=6$, т.е. $\dfrac{6}{l^2}=6 \Rightarrow l=\pm 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=l=z=1, \\ t=l=z=-1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=1, \\ x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{3},\ z=-1. \end{array}\right.$$

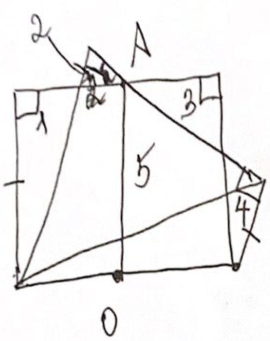
— эти ответы нам, очевидно, подходят.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1\right)$.

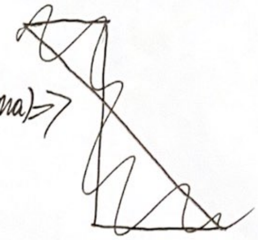
Чистовик

4

(5)



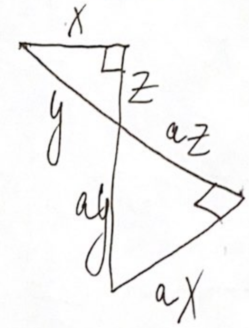
$\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = \Delta 4$, т.к. конструкция симметрична относительно OA (все соотв. углы равны), и $\Delta 3$ и $\Delta 4$ подобны,



то суммы их сторон равны: $x+y+az = ax+ay+z$ (сторона квадрата) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x+y-z)(a-1)=0 \Rightarrow a=1$ и $\Delta 3 = \Delta 4$.

(т.к. $x+y>z$ по нер-ву треуг.)



Осталось найти максимальную площадь маленького треугольника (площадь всей фигуры это $(\Delta 5+\Delta 3+\Delta 1)+\Delta 2+\Delta 4 =$ $=$ пл квадрата $+\Delta 2+\Delta 4$, но у $\Delta 4$ фиксированная сумма сторон — $\sqrt{17}$, т.е. нам нужно найти максимум площади прямоуг. треугольника при фиксированной сумме сторон, ~~а~~ т.е. получаем равноб. треугольник (очевидно из нер-ва о средних), тогда ~~[illegible]~~ получаем:

$S_{шек.} = \frac{17}{2} + 2S_{\Delta 4}$, где $S_{\Delta 4} = \frac{a^2}{2}$ при a — катете и $a+a+a\sqrt{2}=\sqrt{17}$,

значит $S = \frac{17}{2} + \left(\frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 \overset{*}{=} \cancel{17\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) = 17\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{\max(S) = \frac{17(4+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})}}$

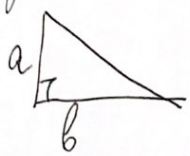
$\overset{*}{=} 17\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6+4\sqrt{2}}\right) = \cancel{17\left(\frac{4+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}\right)}\ \frac{17}{2}\left(1+\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right) = \frac{17}{2}\cdot\frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{17(2+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{17(2+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}$.

чистовик

5

док-во равнобедренности: (продолжение №5)



$S = \frac{1}{2}ab$, но по нер-ву о средних $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, где рав-во выполняется при $a = b$, чтд.

$a^{\lg 2} = (a+1)\lg 2$

$f(a) = a^{\lg 2} - a\lg 2 - \lg 2$

$f'(a) = a^{\lg 2} \cdot \ln(\overset{a}{\cancel{\lg 2}}) - \lg 2$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$a^{\lg 2} \cdot \ln(\overset{a}{\cancel{\lg 2}}) = \lg 2$

$S = \frac{1}{2}ab$

$\frac{1}{2}\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{4}$

рав-во выполняется при $a=b$.

черновик

рассм. $f(x)=|x|+\arccos x$:

$\left.\begin{matrix}|x|\geq 0\\ \arccos x\geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow |x|+\arccos x\geq 0$, т.е. например, при $b=-5$ реш-й не будет,

т.к. $-\frac{1}{4}<0 \Rightarrow$ данные a не подх. по условию.

ответ: нет реш-й

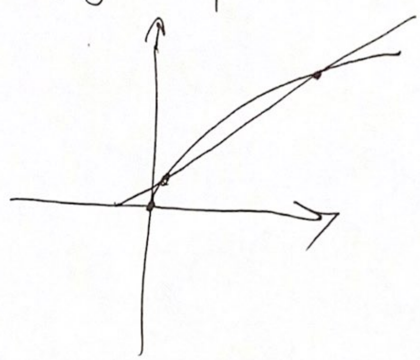
$a(2+\sqrt{2})=\sqrt{17}$

$a=\frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}$

~~lg 2~~

$\log_{10}2>\log_{10}$

$\log_{10}2>\frac{1}{4}$, т.к. $\frac{1}{4}=\log_{10}\sqrt[4]{10}$



черновик

8

$f(x) = |x| + \cancel{arcco} \arccos x$ всегда ≥ 0.

$|x| \geq 0$

$\arccos x \geq 0$

при $x < 0$ $f(x)$ – сумма убывающих, т.е. убывающая.

y $\pi+1$ $\frac{\pi}{2}$ -1 x

при $x \geq 0$, $f(x) = x + \arccos x$

$f'(x) = 1 - \arcsin x$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' =$

$1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$1 - x^2 = 1$

$x = 0$

$-$ $+$ 0

$\cancel{a^{\lg(x^2-3)} = \lg_2(x^2-2)}$

$(x^2-3)^{\lg a} = (x^2-3+1) \cdot \lg a$.

$a^{b\lg a} = (a+1) b\lg a$

$ab+b$.

$a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$f(a) = a^b - ab - b$.

$\lg a = \frac{1}{2}$.

!

черновик

9

$$\begin{cases} |x| - \arcsin x - \arccos x + (b+1)\arccos x + b|x| - b - \frac{\pi}{2} = 0 \\ (b+1)(|x| + \arccos x) = \end{cases}$$

при любом b должно выполняться $\Rightarrow$ и при $b=-1$.

$\underbrace{b=-1}$:

$\cancel{|x|} - \arcsin x - \arccos x \cancel{- |x|} + 1 + a = 0$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$. – получаем, что a может быть только таким, но нужна проверка:

$|x| - \arcsin x - \arccos x + (b+1)\arccos x + b\cdot|x| - b + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$(b+1)(|x| + \arccos x) = 1.$

$|x| + \arccos x = \frac{1}{b+1}$

~~$x \in [-1;1]$~~

$\frac{1}{b+1} \in$

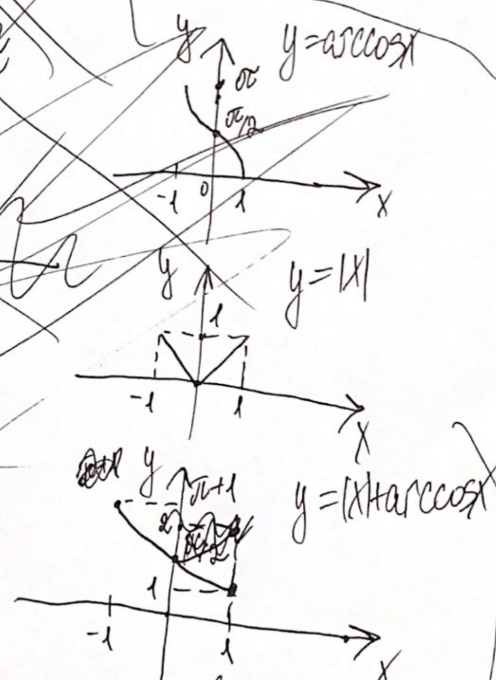
~~$f(x) = |x| + \arccos x$~~

~~$\frac{\pi}{2} \le \frac{1}{b+1} \le \pi + 1$~~

~~Все т.е. при, например, $b=-5$ решений~~

~~не будет, т.к. $-\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}$~~

~~Ответ: нет реш-й.~~



$(|x| + \arccos x) \in [\frac{\pi}{2}; \pi + 1]$

черновик

10

$b=-1:$

$$\underbrace{|x|-\arcsin x-\arccos x}_{-\frac{\pi}{2}}-|x|^{+1}+a=0$$

$$a=\frac{\pi}{2}-1.$$

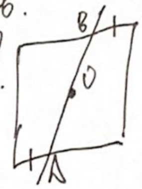
$$(b+1)(\arccos x+|x|)=-b.$$

$$a=\frac{-\pi}{2}:$$

$$|x|-\arcsin x+b(\arccos x+|x|-1)=\frac{-\pi}{2}$$

$$|x|(b+1)+\cancel{b\arccos x}+(b+1)\arccos x=\pi-b.$$

$$(b+1)(\arccos x+|x|)=\pi-b.$$



$$2^{\lg(x^2-3)}=\lg 2^{x^2-2}$$

$$(x^2-3)^{\lg 2}=(x^2-2)\lg 2$$

$\sqrt{17}$

$$a^b=(a+1)b$$

$\sqrt{17}$

$\frac{17}{2}$?

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 & |\cdot 6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 & |\cdot 2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 & |\cdot 3 \end{cases}$$

$S=h\cdot a$

$$12x-18y+6z-12x+18y-6z+\frac{6}{xy}+\frac{2}{xz}+\frac{3}{yz}=49$$

$$\frac{3x+2y+6z}{xyz}=49=7^2 \quad 3x+2y+6z=49xyz$$

черновик

Б11

~~20212223~~

~~1960~~

~~2021~~

~~$\underbrace{2021 22 \dots 99}_{160}$ $\underbrace{100 101 102 \dots 199}_{300}$ … 599~~

~~$99-20+1=80$~~

~~$160+\cancel{300}\ 1800=1960$~~

~~6~~

~~61~~

~~60~~

~~600~~
~~601~~
~~…~~
~~$\cancel{610}$~~
~~619~~
~~620~~

1

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2021 22 \dots 99}_{160}\ \underbrace{100 101 \dots 199}_{300}}_{460} \dots 599}_{1960=160+6\cdot 300}\ \underbrace{600 601 \dots 619}_{3\cdot 20=60}}_{2020}\quad 620$$

2021 → 620

Ответ: 6.

Черновик

Б12