МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шевчук Артём Дмитриевич**

Класс: **11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шевчук Артём Дмитриевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	90 баллов

№1

Все двузначные числа в последовательности 20 21 22 23... с 20 до 99 занимают 160 мест. Оставшиеся места занимают трёхзначные числа с 100 до 1860 : 3 + 100 - 1 = 620 + 99 = 719. Числа с 100 до 719 занимают оставшиеся 1860 мест. Необходимая цифра стоит на 1861 месте среди трёхзначных чисел. Следовательно, на 1861 месте стоит первая цифра числа, последующего за 719 — 720. Первая цифра числа 720 — 7.

Ответ: 7.

Доп. лист 2 из 14 чистовик №2 Вариант 2

№2

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

ОДЗ: $x \in [-1; 1]$

При $b = -1$:

$|x| - \arcsin x \cancel{a} - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$

$a - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

При $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

имеет всего один корень $x = 1$ при любом значение b

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$

~~$2^{\log_3(x^2-3)} = \log_2(x^2-2)$~~

~~$(x^2-3)^{\log_3 2} = \log_2(x^2-2)$~~

~~Пусть $t = x^2-3$, $\alpha = \log_3 2$, тогда~~

Лист 3 из 14 Источник №3 Вариант 2

$$2^{\lg(x^2-3)} = \log_2(x^2-2)$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = \lg 2\cdot(x^2-2)$$

Пусть $t = x^2-3$, ~~то~~ $\lg 2 = \alpha$, тогда

$$\alpha(t+1) = t^{\alpha}$$

$\alpha < 1$

$$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}$$

график функции вверх, производная монотонно ~~растет~~. уменьшается.

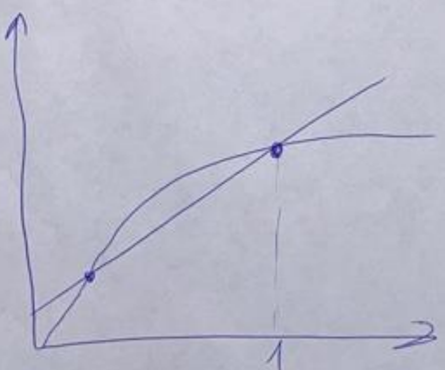
Пусть $f(x) = (t+1)\cdot\alpha$; $g(t) = t^{\alpha}$, тогда

$f(0) = \alpha$ $g(0) = 0 \Rightarrow f(0) > g(0)$

$g(1) = 1$ $f(1) = 2\alpha \Rightarrow g(1) > f(1)$

$1 > 2\lg 2$

$\frac{1}{2} > \lg 2 \Leftrightarrow \sqrt{10} > 2 \Leftrightarrow 10 > 4$ - верно



Две точки пересечения $\Rightarrow$ 4 корня так как $t = x^2-3$

Ответ: 4

лист 4 из 14 Чистовик №4 Вариант 2

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Пусть $a=\frac{1}{xyz}$, тогда:

$$\begin{cases} 2x-3y+az=6 \\ 3z-6x+ay=2 \\ 6y-2z-ax=3 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \oplus \\ \cdot a \\ \oplus \\ \cdot 6 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} (a-9)y+(3a+3)z=20 \\ (a^2+36)\cdot y+(3a-12)z=2a+18 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (a-9)y+(3a+3)z=20 \\ (3a-12)z+y(36+a^2)=18+2a \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a-4) \\ +\ominus \\ (a+1) \end{matrix} \right| \begin{matrix} (a^2+36) \\ \ominus \\ (a-9) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} [(a-9)(a-4)-(a+1)(a^2+36)]y=20(a-4)-2(a+9)(a+1) \\ [3(a+1)(a^2+36)-3(a-4)(a-9)]z=20(a^2+36)-2(a+9)(a-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [a^2-4a-9a+36-a^3-36a-a^2-36]y=20a-80-2a^2-20a-18 \\ 3[a^3+36a+a^2+36-a^2+9a+4a-36]z=20a^2+720-2a^2+162 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3+49a)y=2a^2+98 \quad * \\ 3(a^3+49a)z=882+18a^2 \quad \Delta \end{cases}$$

$*$ $ay(a^2+49)=2(a^2+49)$

$ay=2$

Δ $3a(a^2+49)z=18(a^2+49)$

$3az=18$

$az=6$

$$\begin{cases} ay = 2 \\ az = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a} \\ z = \frac{6}{a} \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение:

$2x - 3y + az = 6$

$2x - \frac{6}{a} + 6 = 6$

$2x = \frac{6}{a}$

$x = \frac{3}{a}$

$a = \frac{1}{xyz}$

$a = 1 : (x \cdot y \cdot z)$

$a = 1 : \left(\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{2}{a}\right)$

$a = 1 \cdot \frac{a^3}{36}$

$36a = a^3$

$36 = a^2$

$$\left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -6 \end{array}\right.$$

Ответ:

При $a = 6$:

$x = \frac{3}{a} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{a} = \frac{1}{3}$

$z = \frac{6}{a} = 1$

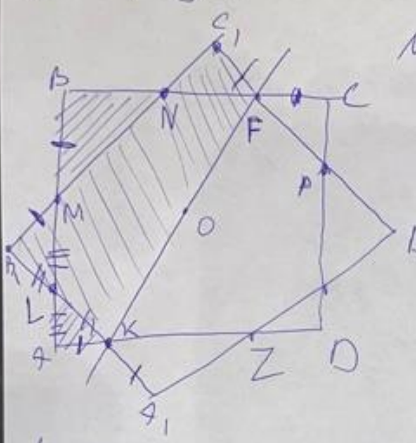
При $a = -6$:

$x = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{3}$

$z = \frac{6}{a} = -1$

№5



ΔLAK – прямоугольный треугольник. Пусть его сторона $AK = x$.

$\Delta LAK = \Delta BMN = \Delta FCP = \Delta LB_1M = \Delta NC_1F = \Delta KA_1Z \Rightarrow AK = KA_1 = B_1M = BM = C_1F = FC = x$

И так, площадь искомой фигуры равна сумме площадей прямоугольной трапеции B_1C_1FK, прямоугольного треугольника BNM и прямоугольного треугольника LAK.

Пусть a – сторона квадрата. Тогда $S_{\square B_1C_1FK} = \dfrac{(x + a - x)}{2} \cdot a = \dfrac{a^2}{2}$

$P_{\Delta ALK} = LA + AK + LK = AL + LM + MB = a$

$S_{\Delta ALK}$ должна быть максимальной. Наибольшая площадь у прямоугольного треугольника с известным периметром будет при наибольшем радиусе вписанной окружности. При чём радиус вписанной окружности максимален касание с невписанной окружностях.

Если радиус больше, то окружности пересекаются, что невозможно. Следовательно треугольник равнобедренный. Следовательно $\angle AKL = 45^\circ \Rightarrow \angle B, LF = \frac{180-45}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5^\circ$

Следовательно $AB = 2x + x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$

$S_{\triangle ALK} = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$

Следовательно искомая площадь равна:

$$\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^2 + a^2(3-2\sqrt{2})}{2} =$$

$$= \frac{a^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2} = 2a^2 - 2a^2\sqrt{2} = a^2(2-2\sqrt{2})$$

$a^2 = 17$ (по условию) $\Rightarrow$ искомая площадь равна $17(2-2\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-2\sqrt{2})$

Лист 843 44   Черновик №1

Все двузначные числа в последовательности 202122...

с 20 до 99 занимают $80 \cdot 2 = 160$ мест.

Оставшиеся ~~[illegible]~~ $2021 - 160 = 1861$ занимают

трёх значные числа. на 1860 местах разместились

числа с 100 до 1860 $1860 : 3 + 100 - 1 = 720 - 1 = 719$.

числа с 100 до 719 занимают первые

1860 мест, следовательно первая ~~[illegible]~~

цифра, числа, последующего за 719

стоит на 1861 месте. Значит, на 1861

месте стоит первая цифра числа 720,

что равняется 7.

Ответ: 7

лист 3 из 14 Черновик №2

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

ОДЗ: $x \in [-1;1]$

При $b = -1$:

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$

$a + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

При $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение ~~$|x| - \arcsin x + b\arccos x$~~

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

имеет всего один корень $x=1$ при любом значении b.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$

лист 10 из 14 черновик 3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = \lg 2\,(x^2-2)$$

Пусть $t = x^2-3$; $\alpha = \lg 2$,

тогда $\alpha(t+1) = t^{\alpha}$ ($\alpha < 1$)

$$(t^{\alpha})' = \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}} \Rightarrow \text{график}$$

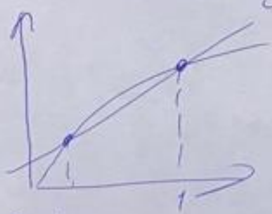
выпуклый вверх, производная монотонно уменьшается.

Пусть $f(t) = (t+1)\alpha$; $g(t) = t^{\alpha}$, тогда

$f(0) = \alpha \quad g(0) = 0 \Rightarrow f(0) > g(0)$

$g(1) = 1 \quad f(1) = 2\alpha \Rightarrow g(1) > f(1)$

$1 > 2\lg 2 \Rightarrow \frac{1}{2} > \lg 2 \Leftrightarrow \sqrt{10} > 2 \Leftrightarrow 10 > 4$ верно.



Две точки пересечения, следовательно 4 корня (т.к. $x^2-3=t$)

Ответ: 4 корня.

Лист 11 из 14 Задача №4

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

Пусть $a=\frac{1}{xyz}$, тогда:

$$\begin{cases} 2x-3y+az=6 & \Big|\cdot 3 \\ 3z-6x+ay=2 & \Big|\cdot a \\ 6y-2z+ax=3 & \Big|\cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-9)y+(3a+3)z=20 \\ (a^2+36)\cdot y+(3a-12)z=2a+18 \end{cases}$$

$(a-9)\cdot y+(3a+3)z=20$ $\Big|\begin{matrix}(a-4)\\(a+1)\end{matrix}\ominus$ $\Big|\begin{matrix}(a^2+36)\\(a-9)\end{matrix}\ominus$

$(3a-12)z+y(36+a^2)=18+2a$

$$\begin{cases} [(a-9)(a-4)-(a+1)(a^2+36)]\,y=20(a-4)-2(a+9)(a+1) \\ [3(a+1)(a^2+36)-3(a-4)(a-9)]\,z=20(a^2+36)-2(a-9)(a+9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [a^2-4a-9a+36-a^3-36a-a^2-36]\,y=20a-80-2a^2-20a-18 \\ [3(a^3+36a+a^2+36-a^2+9a+4a-36)]\,z=20a^2+720-2a^2+162 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3+49a)y=2a^2+98 \quad * \\ 3(a^3+49a)z=882+18a^2 \quad \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay=2 \\ az=6 \end{cases}$$

$y=\frac{2}{a}$

$z=\frac{6}{a}$

$a^3y+49ay=2a^2+98$

$*$ $ay(a^2+49)=2(a^2+49)$

$ay=2$

Δ $3(a^3+49a)z=882+18a^2$

$3a(a^2+49)z=18(a^2+49)$

$3az=18$

$az=6$

Подставим в первое уравнение или 12 из 14

$2x - 3y + az = 6$

$2x - \frac{6}{a} + \cancel{6} = \cancel{6}$

$2x = \frac{6}{a}$

$x = \frac{3}{a}$

$a = \frac{1}{xyz}$

$a = 1 : \left(\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{2}{a}\right)$

$a = 1 : \left(\frac{36}{a^3}\right)$

$a = \frac{a^3}{36}$

$36a = a^3$

$36 = a^2$

$\left[\begin{array}{l} a = 6 \\ a = -6 \end{array}\right.$

Ответ:

При $a = 6$:

$x = \frac{3}{a} = \frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{a} = \frac{1}{3}$

$z = \frac{6}{a} = 1$

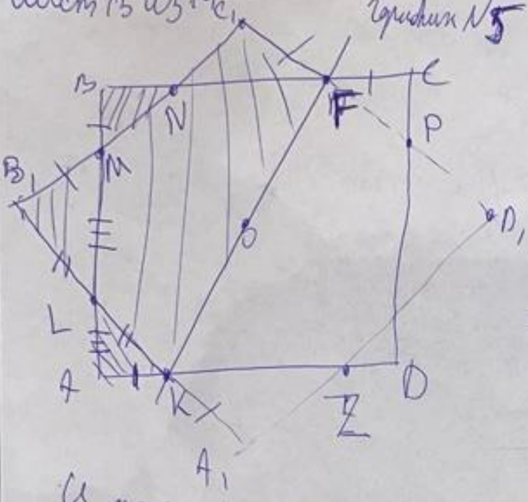
При $a = -6$:

$x = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2}$

$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{3}$

$z = \frac{6}{a} = -1$

Графики №5



$\triangle LAK$ – прямоугольный треугольник. Пусть его сторона $AK = x$.

$\triangle LAK = \triangle BMN = \triangle FCP = \triangle LB_1M = \triangle NC_1F = \triangle KA_1Z \Rightarrow$

$AK = KA_1 = B_1M = BM = C_1F = FC = x$.

И так, площадь искомой фигуры равна сумме прямоугольной трапеции B_1C_1FK, прямоугольного треугольника BNM и прямоугольного треугольника LAK

Пусть a – сторона квадрата. $\Rightarrow S_{\square B_1C_1FK} = \frac{(x+a-x)}{2}\cdot a = \frac{a^2}{2}$

$P_{\triangle ALK} = AL+LK+AK = AL+LM+MB = a$

$S_{\triangle ALK}$ должна быть максимальной.

Наибольшая площадь у прямоугольного треугольника с известным периметром будет при наибольшем радиусе вписанной окружности, при т.м. ~~это как~~ радиус вписанной окружности максимален при касании вписанной и вписанной окружностях, ~~пересекаются, то то~~ Если радиус больше, то окружности пересекутся, что невозможно. Следовательно треугольник равнобедренный.

Следовательно $\angle AKL = 45° \Rightarrow \angle D_1LF = \frac{180-45}{2} =$

$= \frac{135}{2} = 67{,}5°.$

Следовательно $AB = 2x + x\sqrt{2}$, $\Rightarrow$

$\frac{3\cdot 17}{51}$

$\Rightarrow x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$

$S_{\triangle ALK} = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4}$

Следовательно искомая площадь равна:

$\frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{2} =$

$= \frac{a^2 + a^2(3-2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^2+3a^2-2\sqrt{2}a^2}{2} =$

$= \frac{4a^2-2\sqrt{2}a^2}{2} = 2a^2 - 2\sqrt{2}a^2 =$

$= a^2(2-2\sqrt{2})$

$a^2 = 17$ (по условию) $\Rightarrow$ искомая S равна $17(2-2\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-2\sqrt{2})$