МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кривчук Василий Олегович**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Кривчук Василий Олегович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	15 баллов	5 баллов	20 баллов	80 баллов

Лист 10. Черновик

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$$

$\cdot 6 \quad \cdot \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$

$\cdot 2 \quad \cdot \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}$

$\cdot 3 \quad \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6}$

$x=3$

$2x-3y=0$

$3z-6x=0$

$6y-2z=0$

$6z+2y+3x \le 3\cdot\sqrt[3]{36xyz}$

$6z+2y+3x \le 3\cdot 6^{\frac{3}{3}}\cdot(xyz)^{\frac{1}{3}}$

$49xyz \le 3\cdot 6^{\frac{3}{3}}$

$xyz \le \frac{3\cdot 6^{\frac{3}{3}}}{49}$.

$3z-9y+\frac{3}{xy}+\frac{1}{xz}=20$

$6z-18y+\frac{6}{xy}+\frac{2}{xz}=40$ $\quad bc=18zy$

$18y-6z+\frac{3}{yz}=9$

$\frac{6}{xy}+\frac{2}{xz}+\frac{3}{yz}=49$.

$6z+2y+3x=49xyz$.

$2x-3y=a$

$3z-6x=b$

$6y-2z=c$.

$6a+2b+3c=0$.

$a=\frac{-2b-3c}{6}$

$a=-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}$.

$a+\frac{1}{xy}$

$3x=\frac{3z+\frac{1}{xz}-2}{2}$

$xyz=\frac{6z+2y+3x}{49}$.

$2x-3y+\frac{1}{xy}=6$.

$2x+\frac{1}{xy}=6+3y$

$2xy+\frac{1}{x}=3y^2+6y$

$2x-3y+\frac{49z}{6z+2y+3x}=6$

$\cancel{18yz-12xz+\frac{2}{yz}+\frac{2}{xz}}$

$12zx-12zy+4xy-6y^2+6x^2-9xy+49z=36z+12y+18x$

$12zx-12zy+4xy-6y^2+6x^2-9xy+13z-12y-18x=0$.

$12z(x-y)-5xy+6(x^2-y^2)+13z-12y-18x$

$2x^2y-3y^2x+1=6xy$

$2x-3y-6=\frac{1}{xy}$

$3z-6x-2=\frac{1}{xz}$

$6y-2z-3=\frac{1}{yz}$

$x-\frac{3y}{2}+\frac{1}{2xy}=3$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{1}{6xy}=1$

$\frac{3z}{2}-3x+\frac{1}{2xz}=1$

$2y-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3yz}=1$

$\frac{2x}{3}-y+\frac{1}{3xy}=2$

$2x-3y+\frac{1}{xy}=6$

$z-2x+\frac{1}{3xz}=\frac{2}{3}$

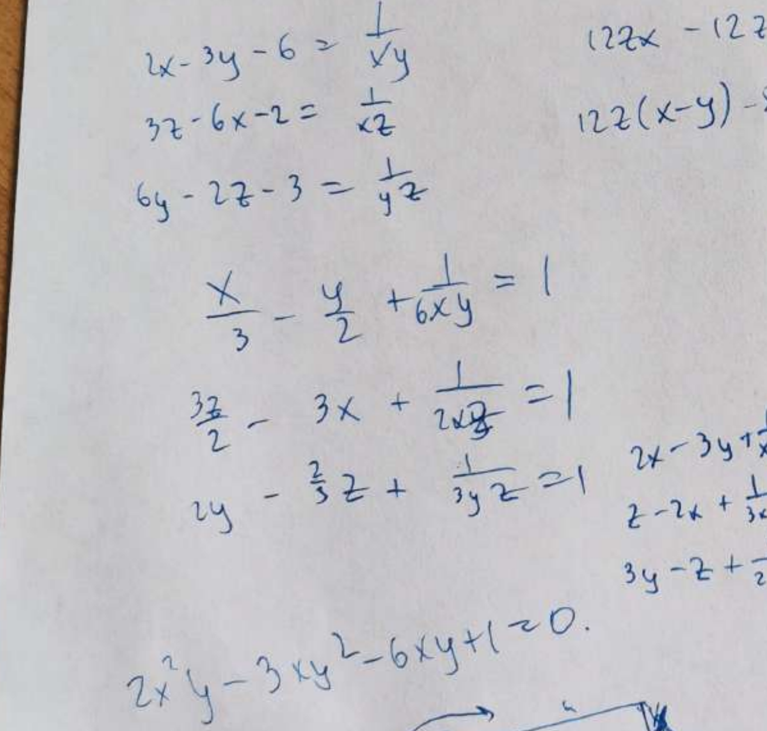
$3y-z+\frac{1}{2yz}=\frac{3}{2}$.

$\frac{z}{3}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9xz}=\frac{2}{9}$

$y-\frac{z}{3}+\frac{1}{6yz}=\frac{1}{2}$

$2x^2y-3xy^2-6xy+1=0$.

$\frac{1}{3xy}+\frac{1}{9xz}+\frac{1}{6yz}=2+\frac{1}{2}+\frac{2}{9}$.



$\cancel{6z+2y+3x}<1 \quad 1$

$2x-3y+\frac{1}{xy}=6$

$3y-2x+\frac{1}{3xz}+\frac{1}{2yz}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$.

$3y-2x-\frac{1}{xy}=-6$

$36y-24x+\frac{2}{xz}+\frac{3}{yz}-\frac{6}{xy}=-23$

$6y-4x+\frac{1}{3xz}+\frac{1}{2yz}-\frac{1}{xy}=$

$3y-2x<$ $\quad 36y-24x+49-\frac{12}{xy}=-23$.

$\cancel{6y-4x}$ $\quad \cancel{\frac{49-\frac{6}{xy}}{6}}<\frac{1}{xy}=$

Лист 9 Черновик

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ $(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot\lg 2$

$\cancel{\lg(x^2-3)\cdot\lg 2 = \lg(x^2-2)\cdot\lg 2}$

$\underbrace{20\,21\,22\,23\,24\,25\,26\,27\,28\,29}_{20}\underbrace{30\,31\ldots39}_{20}\ldots99$

620-е трёхзначное число

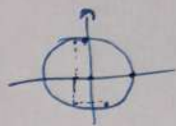
$2,3,4,5,6,7,8,9,\cancel{\#} - 20\cdot 8 = 160$ цифр в двузначных

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array} \Big| \frac{3}{620} \quad \text{ост. } 1$$

$\underbrace{\ldots}_{160}$ 100 101 102 103 ..... 7 165

Ответ: 7 (номер сотни)

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$ Рассмотрим $b = -1$



$-(\arcsin x + \arccos x) + 1 + a = 0$

$-\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0$

$a = \frac{\pi}{2} - 1.$

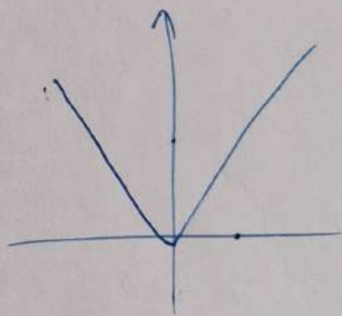
$x = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}$

$\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$ $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ $2\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} =$

$x = 1$ всегда корень

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0.$



$|x| + b|x| - b - 1 - \arcsin x + b\arccos x + \frac{\pi}{2} = 0.$

$-\arcsin x + b\arccos x = \cancel{\ldots} = -\frac{\pi}{2} + (b+1)\arccos x$

$|x| + b|x| - b - 1 \cancel{-\frac{\pi}{2}} + (b+1)\arccos x = 0$

$(b+1)|x| - (b+1) + (b+1)\arccos x = 0$

$|x| - 1 + \arccos x = 0$

$|x| + \arccos x = 1$

$x + \arccos x = 1$

$1 - \arcsin 1 + b\cdot(\arccos 1 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$b\arccos 1 - \arcsin 1 + \frac{\pi}{2} = 0$

Лист 8. Черновик

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$. $\lg 2^{11} > 2$ ООЗ: $x^2 > 3$.

$f(2)$

$f(x) = 2^{\lg(x^2-3)} - \lg 2^{(x^2-2)} = 0$ $\lg 2^{10} \approx 3$ $2^{\lg 6} - \lg 2^7$

$10 \lg 2$ $6^{\lg 2} - (6 \lg 2 + \lg 2)$.

$f(2) > 0$ $0{,}0001^{\frac{1}{4}}$

$f(\sqrt{3}) < 0$.

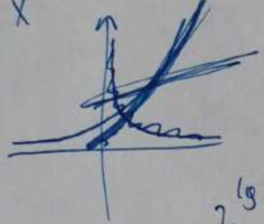
$2^{\lg t} - \lg 2 \cdot 2^t = 0$

$t^{\lg 2} - (t \cdot \lg 2 + \lg 2) = 0$.

$y = x^{\frac{1}{4}}$

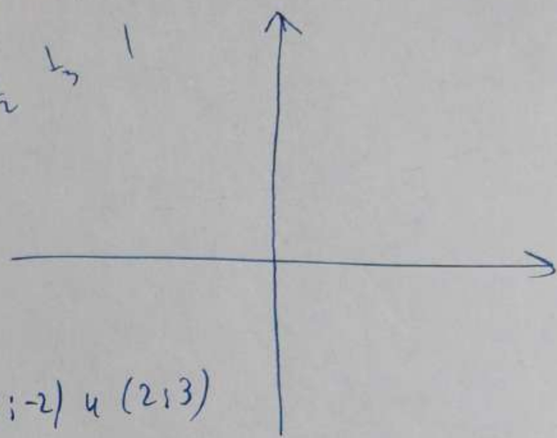
$f(x)$ $x^{\frac{1}{2}}$ $t^a - t \cdot a + a = 0$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ 1

$x^{\frac{1}{4}}$ $f'(x) =$ $t^a = (t+1) \cdot a$



$t^{\frac{1}{4}} = (t+1) \cdot \frac{1}{4}$

t^a.



$2^{\lg 0{,}0001}$

2^{-10}

Ответ: 2 решения между $(-3;-2)$ и $(2;3)$

$a \cdot t^{a-1}$

№4. $2-\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{17}{2}$ $17(2-\sqrt{2})$ $2x^2y - 3xy^2 + 1 = 6xy$

4 $2\sqrt{2}$. $(2x-6)xy$

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$(2x-3y) \cdot a = (3z-6x) \cdot b = (6y-2z) \cdot c$

$3z - 8y + \frac{1}{xz} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{4} < \frac{1}{\lg_2 10} < \frac{1}{3}$.

$2x^2y - 3xy^2 + 1 = 6xy$ $6z - 18y + \frac{2}{3xz} + \frac{6}{xy} = 24$ $\lg_2 10 < 4$

$(2x + \frac{1}{y})(-3y + \frac{1}{x})$

$(2x^2 + \frac{1}{y})(3y^2 + \frac{1}{x}) - 6x^2y^2$ $2y \cdot x^2 - (3y^2 + 6y) \cdot x + 1 = 0$

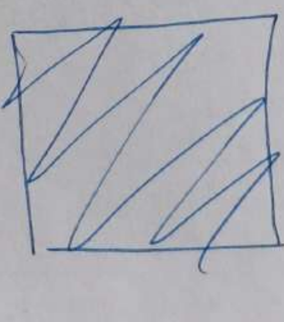
$2x^2y - 3xy^2 - 6xy + 1 = 0$ 16 -160

$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6$ $(2x - 1 + \frac{1}{y})(3y + 1 + \frac{1}{x})$ $7 \mid \frac{3}{2}$

$9z - 18x + \frac{3}{xz} = 6$ 100 1011021

$12y - 4z + \frac{2}{yz} = 6$

$2x - 3y + \frac{1}{xy} = (3z - 6x + \frac{1}{xz}) \cdot (6y - 2z + \frac{1}{yz}) = 3$



$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 18zy - 6z^2$

$2x - 6 = 3y - \frac{1}{xy}$

$6x + 2 = 3z + \frac{1}{xz}$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 6$.

-2

Лист ~~1~~.7 Чистовик

Задача 4.

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

Домножим строчки соответственно на 6, 2 и 3

$$\begin{cases} 12x - 18y + \frac{6}{xy} = 36 \\ 6z - 12x + \frac{2}{xz} = 4 \\ 18y - 6z + \frac{3}{yz} = 9 \end{cases}$$

сложим

$$\frac{6}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{3}{yz} = 49$$

$$\boxed{6z + 2y + 3x = 49xyz}$$

Заметим, что решением ~~у~~ системы является набор $(x;y;z)$

$= (\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1)$ равно как и $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1)$

Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1)$ и $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1)$

Лист 6. Чистовик

8) Проведём OZ, OF, OE

Высота $\triangle MZO, \triangle ZOF, \triangle FOE, \triangle EON$ это r вписан окр-ти

$S_{MA_1B_1N} = \frac{S_4}{2}$, мы максимизируем S_{MA_1Z} и S_{FB_1E} $\Rightarrow$

$S_{MZFEN} \to min$, $S_{MZFEN} = S_{MZO} + S_{ZOF} + S_{FOE} + S_{EON} =$

$= 4\left(\frac{r\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right)$, где r - радиус вписанной в исх. квадрат окр-ти. $r = const$ и $S_{MZFEN} \Rightarrow min \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to min$

Площадь $\triangle MA_1Z$, $\triangle ZOF$, $\triangle FB_1E$, $\triangle ECN$ равна $\frac{x\cdot y}{2}$, а т.ч. площадь должна быть максимальной, то $x \cdot y \to max$.

9) $\left.\begin{array}{l} xy \to max \\ x^2+y^2 \to min \end{array}\right\} \Rightarrow$ по нер-ву Коши $x^2+y^2 \geq 2xy$ и равенство достигается только при $x=y$ $\Rightarrow$ треугольники являются равно бедренными

10) $BF = x$, $FE = x\sqrt{2}$, $EC = x$

$2x + x\sqrt{2} = \sqrt{17} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}$.

$S_{FB_1E} = \frac{x^2}{2} = \frac{17}{2(2+\sqrt{2})^2}$, тогда площадь искомой фигуры равна

$\frac{17}{2} + 2\left(\frac{17}{2(2+\sqrt{2})^2}\right) = \frac{17}{2} + \frac{17}{(2+\sqrt{2})^2} = 17\left(\frac{1}{2} + \frac{6-4\sqrt{2}}{4}\right) =$

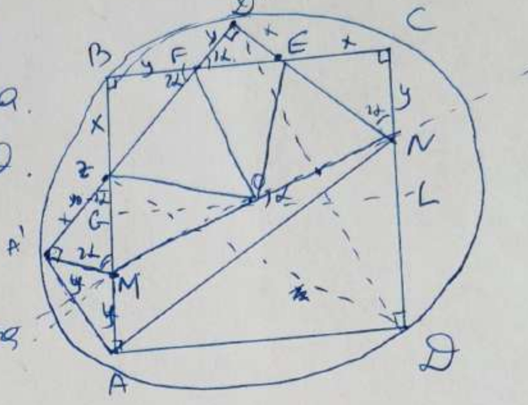
$= 17(2-\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-\sqrt{2})$

Лист 5

Чистовик

Задание 5.



1) Пусть прямая отстоит от центра на угол α, M, N - точки сгиба квадрата. A', D' - точки, симметричные A и D.

Заметим, что точки A' и D' лежат на окр-ти, описанной вокруг квадрата.

2) Через точку O проведём прямую $GL \parallel BC \parallel AD$ ~~подобно~~ Тогда $\angle NOL = \alpha$, $\angle ONL = 90 - \alpha$, $\angle DNO = \angle ONL = 90 - \alpha$, $\angle D_1NC = 180^\circ - 90 + \alpha = 90 + \alpha = 2\alpha \Rightarrow \angle CEN = 90 - 2\alpha. \Rightarrow \angle D_1EF$

$\Rightarrow \angle D_1FE = 2\alpha = \angle BFZ$

$\angle BFZ = 90 - 2\alpha = \angle A_1ZM \Rightarrow \angle A_1MZ = 2\alpha.$

4) $\triangle MA_1Z \sim \triangle ZBF \sim \triangle FD_1E \sim \triangle ECN$ по двум углам $(90^\circ, 2\alpha)$

5) A_1MND_1 и $MBCN$ равны половине площади квадрата $(S_{MBCN} = S_{ABCD}/2)$

6) Пусть ~~сторона~~ ..

тогда $A_1M = AM = y$ и $AM = NC = y. \Rightarrow \triangle MA_1Z = \triangle ECN$

т.к. $S_{A_1MZ} + S_{FD_1E} = S_{ZBF} + S_{ECN}$, и они подобны, то

$\triangle A_1MZ = \triangle ZBF = \triangle FD_1E = \triangle ECN$

7) Пусть $AM = y$, а $ZB = x$.

Тогда $A_1M = y$, $A_1Z = x$

$CN = y$, $EC = x$

$B_1E = x$, $FB_1 = y$

$ZD = x$, $DF = y$.

Лист 4

Чистовик

Таким образом, прямая $g(x)$ пересекает прямую $f(x)$, а значит, как мы уже доказали, она пересечёт её дважды => будут 2 возможных значения t, являющихся корнем.

Это значит, что будет 4 значения x, являющихся корнем, т.к. $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1+3}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2+3}$

Ответ: 4.

Лист 3

Чистовик

Задание 3.

ОДЗ: $x^2-3>0$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

Заметим, что если −x является корнем уравнения, то и x является корнем уравнения, т.к. $(-x)^2=x^2$. При этом 0 - не корень (не подходит по ОДЗ), значит для каждого решения x есть пара $-x$.

Пусть $x^2-3=t$

$$2^{\lg t} = \lg 2^{(t+1)}$$

$$\lg t^{\lg 2} = \lg 2\cdot(t+1)$$

Пусть $\lg 2 = a$

$3<\log_2 10<4 \Rightarrow \lg 2 \in \left(\frac14;\frac13\right)$

$$t^a = a\cdot(t+1)$$

Построим графики ~~t(x)~~ $y(t)$

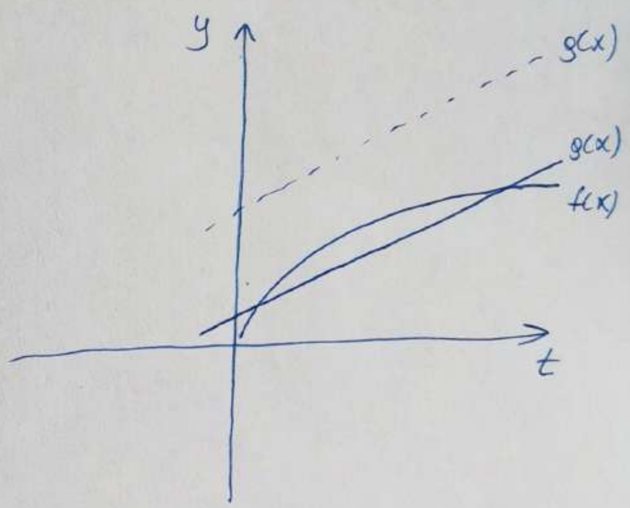


график левой части - степенная функция, имеет вид ~~x~~$^{\frac14}$ или $x^{\frac13}$

график правой части - прямая с коэфф-том наклона a

Производная правой функции равна a,

производная левой равна $a\cdot t^{a-1} = \frac{a}{t^{1-a}}$

чем больше t, тем меньше производная левой функции (при этом при $t>1$ она уже меньше a) => прямая либо пересекает кривую в двух местах, либо проходит вообще выше неё (см. рисунок)

1) Заметим, что при $t=0{,}00$~~1~~ $t^a = 0{,}00$~~1~~^{a} ~~...~~ $<0{,}1$ (т.к. $a<\frac13$),

а $a\cdot(t+1) > \frac14$, т.к. $t+1>1$ и $a>\frac14$.

Значит $g(x)>f(x)$

2) При $t=2$: $2^a>1$, т.к. $a>0$

$a\cdot(t+1) = 3a < 1$, т.к. $a<\frac13$

Значит $g(x)<f(x)$

Лист 2. Чистовик

Задание 2

$|x| - \arcsin x + b\cdot(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

Рассмотрим случай $b = -1$

$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ при любых x (тригонометрическое тождество),

поэтому левая часть обращается в

$-\frac{\pi}{2} + 1 + a = 0$

Значит $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Нам нужны a, при которых исходное уравнение имеет решение при любом b. Но при этом при $b = -1$ решение возможно только при $a = \frac{\pi}{2} - 1$. Значит это единственный возможный ответ. Однако нужно ещё проверить, подходит ли он.

Подставим $a = \frac{\pi}{2} - 1$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

Теперь подставим $x = 1$

$1 - \arcsin 1 + b(\arccos 1 + 1 - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$

$1 - \frac{\pi}{2} + b\cdot 0 + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$0 = 0$

Т.е. заметим, что $x = 1$ является корнем при любых b.

Таким образом при $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение при любом b имеет решение, ч.т.д.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Лист 1

Чистовик

Задание 1.

$$\underbrace{\underbrace{20212223242526272829}_{20}\ \underbrace{30\ldots39}_{20}\ \ldots\ 99}_{20\cdot 8=160.}$$

Для чисел 20-29 нам потребуется 20 цифр (10 чисел из двух цифр), аналогично для чисел 30-39, 40-49 ... 90-99.

Значит всего для чисел 20-99 нам потребуется 8 · 20 = 160 цифр (8 десятков).

Далее на доске будут написаны трёхзначные числа. Нам нужно найти 2021 − 160 = 1861 - ую цифру.

Заметим, что остаток от деления 1861 на 3 равен 1.

Это значит, что искомая цифра будет первой в трёхзначном числе (из разрядов сотен). Значит нам нужно лишь определить разряд сотен этого числа.

Тогда $\begin{array}{r|l} 1861 & 3 \\ \hline -18 & 620 \\ -6 & \\ -6 & \\ 1 & \end{array}$, значит искомое число равно 100+620 = 720, а его первая цифра, соответственно, 7.

Ответ: 7.