МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Приходько Максим Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Приходько Максим Александрович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	15 баллов	90 баллов

Вариант 2 Чистовик. (1)

№1

сначала будут идти двузначные числа. 20, 21, 22 ...., 99:

всего $80 \cdot 2 = 160$ цифр.

Значит осталось $2021 - 160 = 1861$ цифра.

Далее идут трехзначные числа, значит в 1861 цифру поместится $\left[\frac{1861}{3}\right]$ полностью 3-х значных чисел. Т.е: 620 чисел и еще одна цифра.

Первые 620 трехзначных чисел это 100, 101, 102 .... 719.

Значит следующая цифра это первая цифра числа 720, т.е 7.

Ответ: 7.

Чистовик ②

№2

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0 = f(x)$

Подставим $b = -1$: $|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$

$a = \arcsin x + \arccos x - 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 1$

При $a = \frac{\pi}{2} - 1$ уравнение $f(x)$ имеет корень $x = 1$ при любом b:

$f(x) = |x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$f(1) = |1| - \frac{\pi}{2} + b \cdot (0 + |1| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Итак, уравнение имеет решение при любом b, если и только если $a = \frac{\pi}{2} - 1$

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

Чистовик. 3

№3

Сделаем замену $x^2-3=t$

$2^{\lg t} = \lg 2^{(t+1)} \Leftrightarrow$ $2^{\lg t} = t^{\lg 2}$. $\lg 2^{t+1} = (t+1)\cdot\lg 2$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$.

Рассмотрим $f(t) = -t^{\lg 2} + (t+1)\cdot\lg 2$.

$f'(t) = \lg 2 - \lg 2\cdot t^{\lg(2)-1}$

$f''(t) = -\underset{0}{\underset{\vee}{\lg 2}}(\underset{0}{\underset{\wedge}{\lg 2 - 1}})\cdot \underset{0}{\underset{\vee}{t^{\lg(2)-2}}} \geq 0$, для $\forall t \geq 0$.

$f(0) = \lg 2 - 0 = \lg 2 > 0$

$f(1) = 2\lg 2 - 1 < 0$ $(2\lg 2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \lg 2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{10})$

$f(1000) = 1001\cdot\lg 2 - 8 > 0$

Получаем 1 корень на промежутке $(0;1)$ и 1 корень на промежутке $(1;1000)$.

Т.к $f''(t) \geq 0$ для $\forall t \geq 0$, то f имеет не больше двух корней t_1 и t_2.

$x^2-3 = t_1 \in (0,1) \Rightarrow 2$ корня x_1, x_2.

$x^2-3 = t_2 \in (1;1000) \Rightarrow 2$ корня x_3, x_4 $\Rightarrow 4$ корня.

Ответ: 4 корня.

④ Шатовик

№4.

Пусть $2x = a$, $3y = b$, тогда условие представляется в виде.

$$\begin{cases} a-b+\dfrac{6}{ab}=6 \\ 3z-3a+\dfrac{2}{az}=2 \\ 2b-2z+\dfrac{3}{bz}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+\dfrac{6}{a-b}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)=6 & (1) \\ 3(z-a)+\dfrac{2}{z-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{z}\right)=2 & (2) \\ 2(b-z)+\dfrac{3}{b-z}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{b}\right)=3 & (3) \end{cases}$$

$$(1)\cdot\left(\frac{a-b}{6}\right)+(2)\cdot\left(\frac{z-a}{2}\right)+(3)\cdot\left(\frac{b-z}{3}\right):$$

$$\frac{(a-b)^2}{6}+\frac{3}{2}(z-a)^2+\frac{2}{3}(b-z)^2+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}-\frac{1}{b}=$$

$$=a-b+z-a+b-z;$$

$$\frac{(a-b)^2}{6}+\frac{3}{2}(z-a)^2+\frac{2}{3}(b-z)^2=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=b \\ z=a \\ b=z \end{cases} \Rightarrow a=b=z=t.$$

$$a-b+\frac{6}{ab}=6 \Leftrightarrow \frac{6}{t^2}=6 \Leftrightarrow t=\pm 1.$$

(5) Чистовик

№4 (прод.)

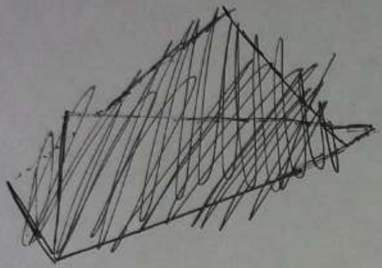
Итак, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x = 1 \\ 3y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = -1 \\ 3y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

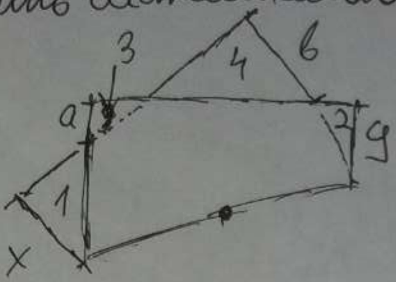
Ответ: $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$ или $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = -1$

⑥ Чистовик

№5

У нашей фигуры площадь размером в половину квадрата есть всегда, нам нужно чтобы она была максимальной, тогда, когда у нас ~~есть~~ появляется 2 треугольника, сумма площадей которых должна быть максимальной.





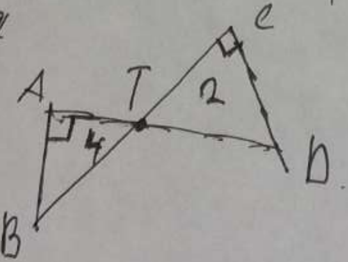
$\Delta 1 = \Delta 2$ по катету и [redacted] острому углу.

$X = y$ так как согнули квадраты по прямой, проходящей через центр. Тогда пусть все гипотенузы равны c. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x + a + c = y + b + c \Rightarrow a = b$.

$\Delta 3 = \Delta 4$ по катету и острому углу.

Рассмотрим $\Delta 4$ и $\Delta 2$, они подобны. $AD + BC = CD + DA =$
$=$ сторона квадрата.



Пусть коэфф. подобия равен α.

№5 (прод.) черновик ⑦

$AB+BT+2AT=2AD+2BT+AT$

$(2-1)(AD+BT-AT)=0$

$AD+BT-AT\neq 0$ (треугольник) =>

=> $2=1$.

$\triangle ABT=\triangle TCD$ => $\triangle 1=\triangle 2=\triangle 3=\triangle 4$.

Тогда сторона квадрата $\sqrt{17}$ = сумме всех сторон одного из треугольников, например ②

$\sqrt{17}=CD+DT+CT$

$\sqrt{17}=CD+CT+\sqrt{CD^2+CT^2}$

При этом произведение CD и CT должно быть максимальным (т.к площадь должна быть максимальной)

При одинаковой сумме сторон, наибольшая площадь у равнобедр. $CD=TC$

$\sqrt{17}=2CD+\sqrt{2}CD$

$CD=\dfrac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}$

Тогда площадь всей фигуры равна: $\dfrac{17}{2}+\dfrac{CD\cdot CD}{2}\cdot 2=$

$=\dfrac{17}{2}+\dfrac{17}{(2+\sqrt{2})^2}=\dfrac{17}{2}+\dfrac{17}{6+4\sqrt{2}}$, это макс. площадь.

Ответ: $\dfrac{17}{2}+\dfrac{17}{6+4\sqrt{2}}$

Черновик (8)

№1 точно:

20212223. $9 \frac{1}{4}^{7}$ ($\frac{1}{4}$).
$8 \frac{1}{4}$.

100 101 102 103 104 105 $11 \frac{3}{4}$ (2).
110

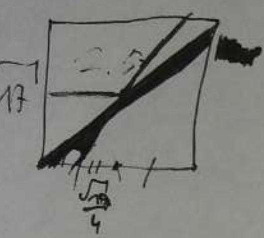
100. 20–99. 80
180
− 2021
160
1106.1 $\frac{3}{1620}$ (1).

$\sqrt{19}$ 6719 $\boxed{7}$ 2021 0721
$\boxed{7}$ точно!!!

№3.
[illegible]. 4. и 5?!!!

№1 7
№2 $\frac{\pi}{2} - 1$
№3 4.
№4 домыслим.
№5 5.5?!!!!

№5



$$\frac{\frac{\sqrt{17}\cdot 3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} \qquad \frac{5}{2}\sqrt{17} \qquad \frac{5}{2}.$$

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{\sqrt{17}}{2}}{\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = 4.$$

черновик. (9)

№4.

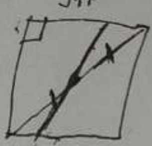
(2)·(3)=

$$\left(3z-6x+\frac{1}{xz}\right)\left(6y-2z+\frac{1}{yz}\right)=6.$$

$$18zy-6z^2+\frac{3}{y}-36xy+12zx+\frac{6x}{yz}+\frac{6y}{xz}-\frac{2}{x}+\frac{1}{xyz^2}.$$

$\cancel{2z(6zy}$

$$6z(3y-z^2)-12x(3y-z)$$



№2

$b=-1$: $\cancel{|x|}-\arccos x-\arcsin x-\cancel{|x|}+a+1=0$

$a=\arcsin x+\arccos x-1$

$\boxed{a=\frac{\pi}{2}-1}$ при $b=-1$

если $a=\frac{\pi}{2}-1$: $|x|-\arcsin x+b(\arccos x-1+|x|)+\frac{\pi}{2}-1=0.$ $b=1$!!

$x=1$

$1+\frac{\pi}{2}+b(\ldots)+\frac{\pi}{2}\ldots$

$\Rightarrow 1-\frac{\pi}{2}+b(\ldots)+\frac{\pi}{2}-1$ $b=0$

Итого: при $a=\frac{\pi}{2}-1$, при любом b есть корень $x=1$.

черновик

(10)

1, 3, 5

№3

$x^2 - 3 = t$

$2^{\lg t} = t \lg 2$

$t^{\lg 2} = t \cdot \lg 2$

$b^2 > 3.$

№1

20
21
22
23
⋮

80

помм – $\boxed{9}$

$x^2 - 3 = 6$

$2^{\lg t} =$

№5

$\sqrt{17}$

$\frac{17}{2}$. 8,5 ?!?!?

№1.

20-30

80 чисел:

100
101
102.

160 чисел: 9

2021
160
1861.

2021
160
1861.
80

160 : 9

1б

1620.(21)

719 - 100 = 619+220

$719 - 100 = 619$

618 619. 620

2021

719. $\boxed{720}$

№1 Ответ: $\boxed{7}$

№3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-3)}$$

$0 < t < 1$

$1 < t + 1 < 2.$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-3) \cdot \lg 2$

$x^2 - 3 = t$

$\lg 2 < 2 < \lg 4.$

$t^{\lg 2} = (t+1) \lg 2.$

$0 < t < 1$

$\frac{1}{5}.$

$0 <$

$> \lg 2$

$6^{\lg 2} = A \lg 2$

$6^{\lg 2}$ $\times$ $7\lg 2$

$t > 1$

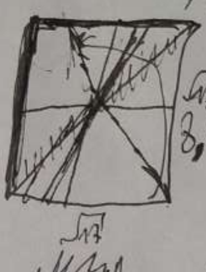
$t = 10.$

$V!2$ к?!?!?

5

0,25 $\frac{1}{2}$.

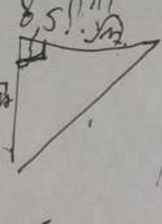
№5



$\sqrt{17}$

8,5 $\sqrt{17}$

8,5?!?! $\sqrt{17}$



№4

$\lg 2 < 4.$

$2 < 3.$

$1 > \lg 4$

$= \log_7 10.$

$\sqrt{17}$

№4.

$t = 100;$

$0 < x^2 - 2 < 1$

$2 < x^2 < 3.$

$3 < x^2 < 4.$

2 к.