МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Бородин Иннокентий Петрович**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Бородин Иннокентий Петрович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	15 баллов	75 баллов

Чистовик

Гр 1

№1 Рассмотрим первые 2021 цифр последовательности.

В данной последовательности содержатся двузначные числа от 20 до 99, поэтому первые 160 цифр последовательности образованы двузначными числами. Оставшиеся 2021 - 160 = 1861 ~~цифра~~ цифры образованы трёхзначными числами.

Вычислим, какому по счёту трехзначному числу принадлежит 2021ая цифра.

$$\begin{array}{r|l} 1861 & 3 \\ \underline{12} & 620 \\ 06 & \\ 6 & \\ (1) & \end{array}$$

Поэтому 2021ая цифра — первая цифра ~~числа 72~~ 621ого трехзначного числа, то есть она равна 7 (т.к. первое трехзначное число равно 100).

Ответ: 2021ая цифра последовательности = 7.

№2

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| + 1) + a = 0$

Пусть при некотором $a = a_0$, x_0 - корень уравнения при любом b, тогда рассмотрим это уравнение:

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{}{b}} \cdot \underbrace{(\arccos x_0 + |x_0| - 1)}_{\text{const.}} = \underbrace{\arcsin x_0 - |x_0| - a_0}_{\text{const.}}$$

Получается, что b любое тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \arccos x_0 + |x_0| - 1 = 0 \\ \arcsin x_0 - |x_0| - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos x_0 + |x_0| - 1 = 0 \\ (\frac{\pi}{2} - \arccos x_0) - |x_0| - a = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right|$$

Чистовик

№2

$$|x| - \arcsin x + b\,(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$|x| + \left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right) + b\,(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$(|x| + \arccos x - 1) + 1 - \frac{\pi}{2} + b\,(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$(b+1)(\arccos x + |x| - 1) = \frac{\pi}{2} - 1 - a$$

1) При $a = \frac{\pi}{2} - 1$:

$$(b+1)(\arccos x + |x| - 1) = 0$$

Заметим, что $x = 1$ – корень при всех значениях b.

$a = \frac{\pi}{2} - 1$ подходит.

2) При $a \neq \frac{\pi}{2} - 1$:

$$(b+1)(\arccos x + |x| - 1) = \frac{\pi}{2} - 1 - a \neq 0$$

~~$D(\arccos x) = [-1; 1]$, поэтому $x \in [-1; 1]$~~

~~Пусть при некотором a условие выполняется, тогда~~

~~т.к. b – любое, то~~

~~$b = \dfrac{\frac{\pi}{2} - 1 - a}{\arccos x + |x| - 1} - 1$ – любое~~

Пусть некоторое a удовлетворяет условию, тогда уравнение должно иметь хотя бы 1 корень при всех b, что неверно, т.к. при $b = -1$:

$\frac{\pi}{2} - a - 1 = 0$, что неверно, поэтому при $b = -1$ нет корней.

3) Из 1); 2) следует, что только $a = \frac{\pi}{2} - 1$ удовлетворяет условию.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

№3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2} \quad *$$

$$2^{\frac{\log_2(x^2-3)}{\log_2 10}} = (x^2-2)\cdot \lg 2$$

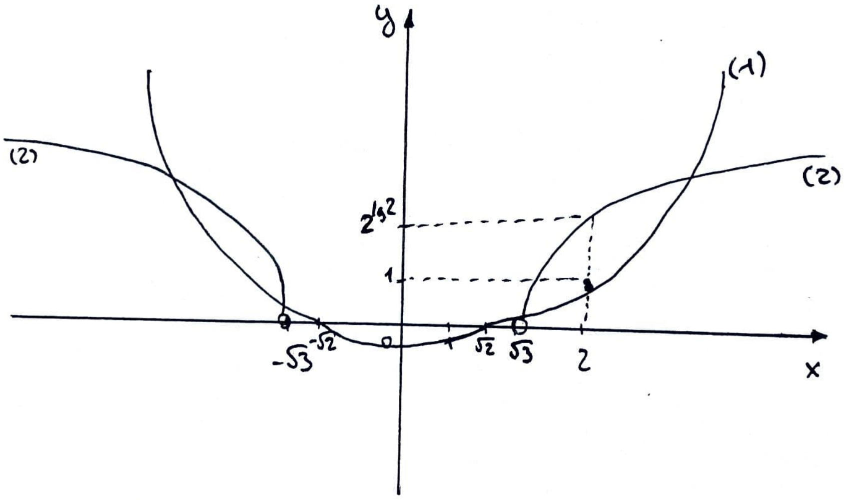
$$\begin{cases}(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot \lg 2\\ x^2-3>0\end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \lg 2\,(x^2-2) & (1)\\ y = (x^2-3)^{\lg 2} & (2)\\ x \notin [-\sqrt{3}; \sqrt{3}] \end{cases}$$

График (1) – парабола, выпуклая вниз

График (2) – ф-ия, выпуклая вверх.

Изобразим эти графики:

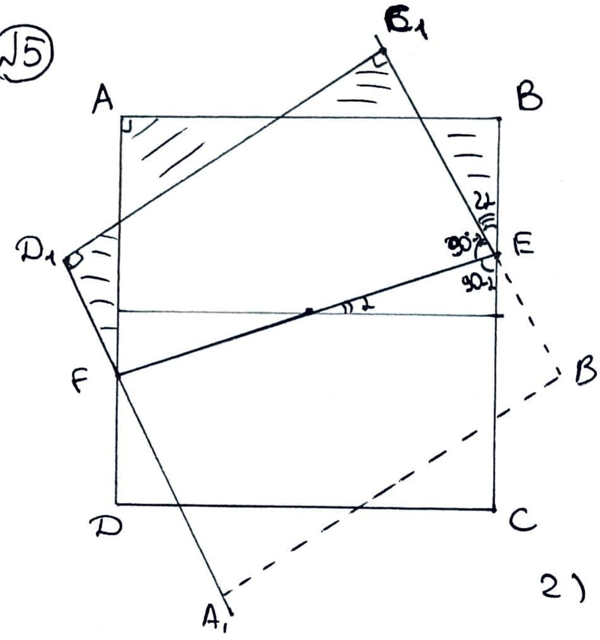


Заметим, что при $x = \sqrt{3}$ значение (1) больше значения (2), а при $x = 2$ значение (1) равно 1, а значение (2) равно $2^{\lg 2}$, поэтому из соображений выпуклости функций при $x > \sqrt{3}$ 2 общие точки.

Обе эти функции чётны, поэтому всего у них 4 общие точки, что означает, что уравнение * имеет 4 корня

Ответ: 4 корня

№5



1) Пусть прямая сгиба (~~[illegible]~~ FE) находится под углом α к средней линии квадрата, тогда $\angle FEC = 90° - \alpha$

$\angle C_1EF = \angle FEC = 90° - \alpha$

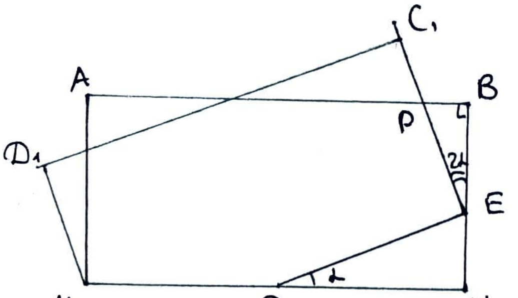
(D_1 и C_1 – положение точек D и C после сгибания)

2) $\angle C_1EB = 180° - \angle C_1EF - \angle FEC = 2\alpha$

3) Достроим фигуру FD_1C_1E до квадрата $A_1B_1C_1D_1$ со стороной D_1C_1.

4) Квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и ABCD равны; $A_1B_1C_1D_1$ получен поворотом ABCD относительно его центра на угол α, поэтому заштрихованные треугольники равны.
(▭)

5) Максимальная площадь фигуры, образовавшейся после ~~складывания~~ сгибания, достигается когда площадь заштрихованных треугольников ~~[illegible]~~. максимальна.



6) Обозначим среднюю линию квадрата за MN; центр квадрата за O;
$C_1E \cap AB = P$

7) $BN = ON = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{S(ABCD)} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

8) $EN = ON \cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot tg\alpha$

$BE = BN - EN = \frac{\sqrt{17}}{2}(1 - tg\alpha)$

~~$PE = BE \sin\alpha$~~ $BP = BE$ ~~[illegible]~~ $tg 2\alpha$

9) $S(\triangle BPE) = \frac{1}{2} BE \cdot BP = \frac{1}{2} tg2\alpha \cdot BE^2 = \frac{1}{2} tg2\alpha\,(1 - tg\alpha)^2 \cdot \frac{17}{4} \longrightarrow max$

№5 Продолжение:

$$S(BPE)=\frac{1}{2}\cdot tg2\alpha\cdot(1-tg\alpha)^2\cdot\frac{17}{4}=\frac{17}{8}\cdot\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}(1-tg\alpha)^2\to max$$

$$\frac{17}{4}\cdot\frac{tg\alpha(1-tg\alpha)}{1+tg\alpha}\to max \qquad (1)$$

Пусть $tg\,\alpha = t$, тогда пусть

$f(t)=\frac{t(1-t)}{1+t}$ - убывающая ф-ция

$f'(t)=\frac{(1-2t)(1+t)-(t-t^2)(1)}{(1+t)^2}$, что равно 0 при $t=-1\pm\sqrt{2}$

~~поэтому максимальное значение выражения (1) равно~~ ~~$tg\,\alpha=-1+\sqrt{2}$, т.к.~~ Поэтому максимальное значение $f(t)$ достигается при $t=-1+\sqrt{2}$, поэтому максимум (1) равен $\frac{17}{4}\cdot(\sqrt{2}-1)^2$ и достигается при $tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=1$, то есть $\alpha=\frac{45^\circ}{2}=22{,}5^\circ$

10) Таким образом максимальная площадь фигуры, получившейся в результате складывания, достигается при $\alpha=22{,}5$ и равна:

$$\frac{17}{2}+2S(\triangle BPE)=\frac{17}{2}+\frac{17}{4}(\sqrt{2}+1)^2=\frac{17}{2}\left(1+\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{17}{4}(5+2\sqrt{2})$$

Ответ: максимум равен $\frac{17}{4}(5+2\sqrt{2})$

Черновик

№1 Двузначные числа:

20, 21 ... 99

80 шт.

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

$2021 - 80 = 1941$

$$\begin{array}{l|l} 1941 & 3 \\ 18 & 647 \\ \ \ 14 & \\ \ \ 12 & \\ \ \ \ 21 & \\ \ \ \ 21 & \\ \hline \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

747

~~~~!

№2

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$\cancel{(b+1)|x| + (b+1)\arccos x - (b + \frac{\pi}{2}) + a = 0}$

$\cancel{(b+1)(|x| + \arccos x) = b + \frac{\pi}{2} - a}$

Пусть при некотором a, x_0 - корень для любого b, тогда:

$\underset{\mathbb{R}}{b}(\underbrace{\arccos x_0 + |x_0| - 1}_{\text{const}}) = \underbrace{-|x_0| + \arcsin x_0 - a}_{\text{const}}$

Данное равенство выполнено тогда и только тогда, когда

$\begin{cases} \arccos x_0 + |x_0| - 1 = 0 \\ -|x_0| + \arcsin x_0 - a = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \arccos x_0 + |x_0| - 1 = 0 \\ -(\arccos x_0 + |x_0|) + \frac{\pi}{2} - a = 0 \end{cases}$

1	1
1	0

$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - a - 1 = 0 \\ \arccos x_0 + |x_0| - 1 = 0 \end{cases}$

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

$x_0 = 1$
~~~~

Черновик

Стр 7.

$$(|x| + \arccos x\} - 1)\ (b+1) = -a + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg(2^{x^2-2})$$

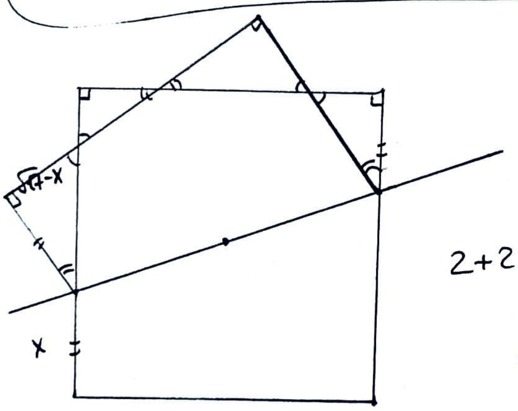
$$\begin{cases} \dfrac{(2x-3y)xy+1}{xy} = 6 \\ \dfrac{3x\cancel{z}(z-2x)+1}{xz} = 2 \\ \dfrac{2xyz(3y-z)+1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3yx + \frac{1}{y} - 6x = 0$$

$$2x^2 - 3(y+2)x + \frac{1}{y} = 0$$

$\cancel{x = (y+2)3 \pm \sqrt{\ }}$

$D = 9(y+2) -$



$$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$2+2\sqrt{2}+1$

$2(1+\sqrt{2})$

$\cancel{(-1+\sqrt{2})}(2-$

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-1-2+2\sqrt{2}} = 1$$

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg(2^{x^2-2})$$

$$2^{\frac{\log_2(x^2-3)}{\log_2 10}} = \lg 2\ (x^2-2)$$

$$\begin{cases} (x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot\lg 2 \\ x^2-3 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{(-1+\sqrt{2})(-\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}} =$$

$$= (\sqrt{2}-1)^2 =$$

$\cancel{1-2t+2t-2t^2-t+t^2} = 0$

$\cancel{t^2-2t-1=0}$

$\cancel{t=-1\pm\sqrt{2}}$

$1+t-2t-2t^2-t+t^2=0$

$-t^2-2t$