



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Солодкин Владимир Сергеевич**

Технический балл: **90**

Дата: **1 марта 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 5-2

1. Уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ имеет корни a и b . Найдите численное значение выражения $7ab - 2a^5 - 5b^3$.
2. Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E . Найдите BC , если $AB : AC = 5 : 4$ и $CE = 4$.
3. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \log_3(6 - y) = x, \\ \sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6 - z) = y, \\ \sqrt{z^2 - 3z + 9} \cdot \log_3(6 - x) = z. \end{cases}$$

4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + 200 \cos^2 x + \frac{81\pi^2}{x^2} + 7 \sin^5 x$$

и укажите все значения аргумента x , в которых оно достигается

5. На столе для бильярда, имеющего форму параллелограмма с углом при вершине 167° , у середины одного из бортов находится единственный шар, по которому игрок наносит сильный удар под углом 1° к борту. Может ли при каких-либо размерах бильярдного стола случиться, что выпущенный шар после нескольких отскоков от бортов вернётся в прежнюю точку? При отскоке угол падения равен углу отражения.

февраль-март 2020 г.

Шифр

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$1) a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 x_2 = -1$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$-(a+1) = b$$

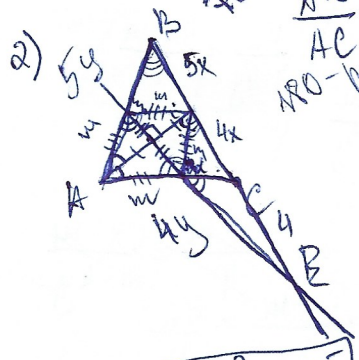
$$5\sqrt{5} + 3 \cdot 5 + 3\sqrt{5} + 1$$

$$4ab - 2a^5 + (a+1)^3 \cdot 5$$

$$-4 - 2 \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)^5}{2^4} + \frac{5 \cdot (\sqrt{5}+1)^3}{8}$$

$$\frac{16x^2}{x^2} + \frac{81\pi^2}{x^2} = \frac{324x^2}{x^2} - \frac{81\pi^2}{x^2} = 201$$

$$\frac{25\sqrt{5} - 5 \cdot 25 + 20 \cdot 5\sqrt{5} - 10 \cdot 5 + 5\sqrt{5} - 1}{80\sqrt{5} - 146 + 50\sqrt{5} + 150\sqrt{5} + 10}$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{4} \quad CE = 4$$

$$\frac{m}{4y-m} \cdot \frac{4}{4+9x} \cdot \frac{5y-m}{m} = 1$$

$$\frac{m}{4y-m} \cdot \frac{4}{4+9x} \cdot 1 = 1$$

$$\frac{4+9x}{4+9x} \cdot \frac{5y-m}{m} = 1$$

$$\frac{160\sqrt{5} - 16}{16} - 4$$

$$10\sqrt{5} - 8$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - 3y + 9}} \right)' = \frac{y(2y-3)}{\sqrt{y^2 - 3y + 9}^3}$$

$$y < 6$$

$$x \rightarrow y, y \rightarrow x, z \rightarrow y$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \log_3(6-y) = x^4$$

$$\sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6-x) = y$$

$$\sqrt{z^2 - 3z + 9} \cdot \log_3(6-z) = z$$

$$(x_0; y_0; z_0) - \text{реш.}$$

$$(y_0; z_0; x_0)$$

$$(z_0; x_0; y_0)$$

$$(x^2 - 3x + 9) \log_3(6-y) = x^4$$

$$f(x) = \frac{16x^2}{x^2} + 200 \cos^2 x + \frac{81\pi^2}{x^2} + 48\pi x \leq 0$$

$$f'(x) = \frac{32x}{x^3} - 200 \cdot 2 \cos x \sin x - \frac{2 \cdot 81\pi^2}{x^3} + 35 \sin 4x \cos x$$

$$\sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6-y) = y$$

$$\log_3(6-y) = \left(1 - \frac{3}{y} + \frac{9}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_3 4 = 0$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{9}{y^2}$$

$$f(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + \underbrace{\frac{81}{x^2}}_{\text{10; 10}} + \underbrace{4 \sin^5 x}_{\text{10; 10}} \leq 4 \sin^2 x + \frac{196 - 336 \cdot \frac{16}{\pi^2}}{336 \cdot \frac{32}{16}}$$

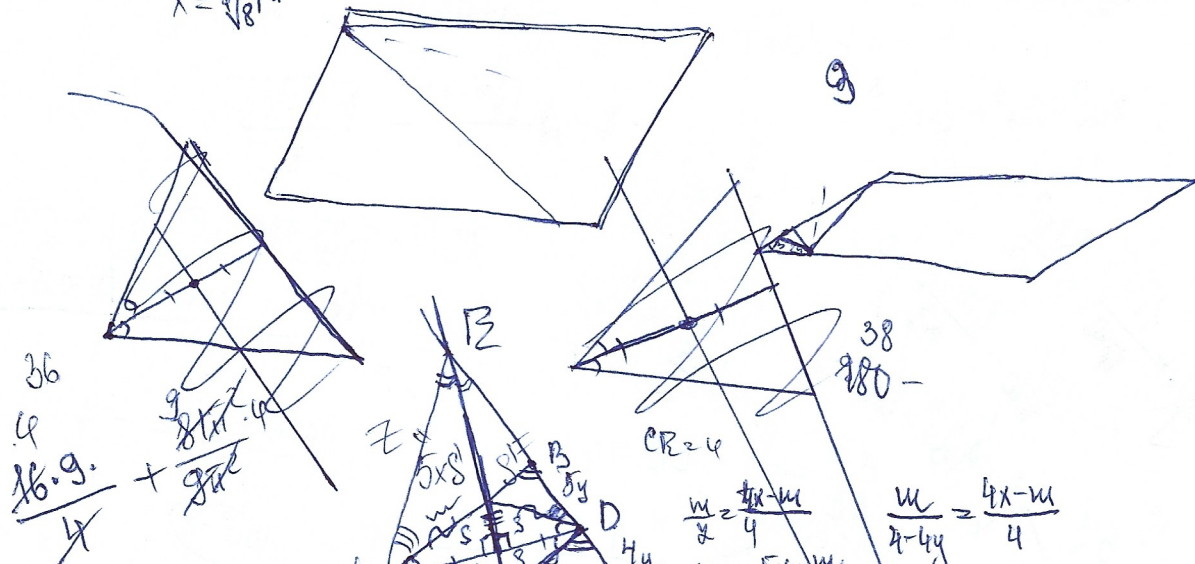
$$(16 + \frac{81}{x^2}) = 16 + \frac{2 \cdot 81}{x^2} = \frac{2(81^2 - 81)}{x^2} = 0 \quad + = + \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} &4 + 81 \cdot 4 \\ &82 \cdot 4 + 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt[4]{2}} \pi$$



$$m(x) = 200 \cos^2 x + 4 \sin^5 x$$

$$m'(x) = 2 \cdot 200 \cdot \sin 2x + 4 \cdot 5 \sin^4 x \cos x = 0$$

$$\sin 2x (35 \sin^4 x = 800) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{m}{4-4y} = \frac{5x-m}{4-9y}$$

$$\frac{4x-m}{4-4y} = \frac{5x-m}{4-9y}$$

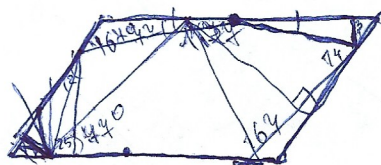
$$\frac{4x}{5} = \frac{5x-m}{5y}$$

$$\frac{9}{25x} \cdot \frac{4-9y}{4} \cdot \frac{16x}{9} = 1$$

$$16 - 36y = 25$$

$$y = \frac{41}{36}$$

38 51
64
44

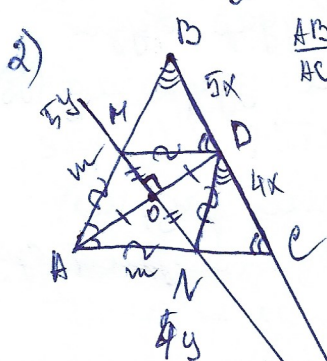


Числовое.

1) $x^2 + x - 1 = 0$; $D = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, пусть $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ тогда
имеем: $4ab - 2a^5 - 5b^3 = -4 - 2 \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)^5}{2^5} + 5 \frac{(\sqrt{5}+1)^3}{2^3} =$

$$= -4 - \frac{80\sqrt{5} - 146 + 80\sqrt{5} + 160}{16} = -4 - 10\sqrt{5} + 1 = \boxed{-3 - 10\sqrt{5}}$$

Если же $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тогда $4ab - 2a^5 - 5b^3 =$
 $= -4 + 2 \cdot \frac{(\sqrt{5}+1)^5}{2^5} - 5 \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{2^3} = -4 + \frac{80\sqrt{5} + 146 - 80\sqrt{5} + 160}{16} = -4 + 21 = \boxed{17}$



2) $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{4}$; $CE = 4$; Пусть серединный перп. к AD пересекает AB и AC в точках M и N соответственно. Проведем MD и ND. $\triangle AOM = \triangle AON$ по катету и остр. углу $\Rightarrow MO = ON$, тогда $\triangle MDO = \triangle NDO$ по двум катетам, тогда $MD = ND = AM = AN \Rightarrow \triangle MDN$ - равноб. Тогда имеем: $AB \parallel DN$, $AC \parallel MD \Rightarrow \angle BDM = \angle BCA$, $\angle ABC = \angle ADC$, тогда $\triangle ABC \sim \triangle NBD$, $\triangle ABC \sim \triangle MDC$. По св. биссектрисы: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{5}{4}$, Пусть $BD = 5x$, $DC = 4x$, $AB = 5y$, $AC = 4y$, $AM = AN = m$.

Из подобия (1) получаем: $\frac{MD}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{5y-m}{5y} = \frac{5}{9} \Rightarrow 5y-m = \frac{5}{9} \cdot 5y$

Из подобия (2): $\frac{DC}{BC} = \frac{NC}{AC} \Leftrightarrow \frac{4y-m}{4y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 4y-m = \frac{16y}{9}$

По теореме Менелая: $\frac{AN}{NC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1 \Leftrightarrow \frac{m}{4y-m} \cdot \frac{4}{9x+4} \cdot \frac{5y-m}{m} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{25x}{9} \cdot 4}{4 + \frac{16x}{9} \cdot (9x+4)} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{4(9x+4)} = 1 \Rightarrow 25 = 36x + 16 \Rightarrow x = \frac{1}{4},$$

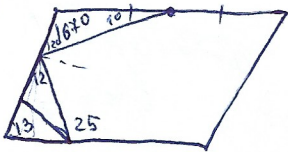
тогда $BC = 9x = \boxed{\frac{9}{4}}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \log_3(6-y) = x \\ \sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6-x) = y \end{cases}$

Заметим, что система инвариантна относительно замены: $\begin{matrix} x \rightarrow y & x \rightarrow x \\ y \rightarrow y & y \rightarrow x \\ x \rightarrow x & x \rightarrow y \end{matrix}$

Чистовик

5)



Пусть игрок нанесет удар таким образом, что первый треугольник, образованный линией удара содержит угол 164° .

В таком случае угол падения $12^\circ = 180^\circ - 1^\circ - 164^\circ$. Угол падения острый, отскок придется на соседнюю сторону (если размеры стола позволяют) под углом 155° . Далее шарик будет биться о сторону с общей вершиной пока угол падения не станет острым: следующий после 155° удар будет под 142° , затем 129° , 116° , 103° . После удара под 103° шарик ударится под 90° , а значит обратится в ту же точку, из которой вылетел в последний раз, но угол падения теперь не равен 103° , а острый 44° . Отскочив под 44° , он пойдет к стороне, из которой началась движение, отскочит от нее также под 44° и ударится о соседнюю с ней еще не заданную сторону под углом 90° . В этом случае он полностью повторит свой путь до точки отправления.

6) $f(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + 200 \cos^2 x + \frac{81\pi^2}{x^2} + 4 \sin^5 x$ Рассмотрим $g(x) = \frac{16x^2}{\pi^2} + \frac{81\pi^2}{x^2}$; $g'(x) = \frac{2(16x^4 - 81\pi^4)}{\pi^2 x^3}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16x^4 - 81\pi^4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{3\pi}{2}$ В т. $x=0$ $g(x)$ не определена,

значит $x_{\min 1} = -\frac{3\pi}{2}$, $x_{\min 2} = \frac{3\pi}{2}$.

Рассмотрим $m(x) = 200 \cos^2 x + 4 \sin^5 x$, очевидно, что $m'(x) = -2 \cdot 200 \cos x \sin x + 35 \sin^4 x \cos x$ $m'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 35 \sin^3 x = 400 \end{cases}$ - не им. корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Достаточно рассмотреть на периоде. $x_{\min} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, но $(m(x))_{\min} = m(\frac{3\pi}{2})$.

Тогда $f(x) = m(x) + g(x)$ будет минимальна тогда,

Методы

когда минимальными $m(x)$ и $g(x)$ одновременно.
(при одинаковых x). Т.е. $\min(f(x)) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cancel{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} =$
 $= 36 + 0 + 36 - 4 = 65$. Ответ: $\min(f(x)) = 65 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$3) \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 3z + 9} \cdot \log_3(6 - x) = z \end{cases}$$

замечая, что система
инвариантна относительно
замены: $\begin{matrix} x \rightarrow y & x \rightarrow z \\ y \rightarrow z & y \rightarrow x \\ z \rightarrow x & z \rightarrow y \end{matrix}$, тогда

подставим в первое уравнение y вместо x
имеем: $\sqrt{y^2 - 3y + 9} \cdot \log_3(6 - y) = y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3(6 - y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 3y + 9}} \quad \text{ОДЗ: } y < 6$$

При $y \in [5; 6)$ левая часть отрицательна, правая положительна.

При $y \leq 0$ левая часть положительна, правая отрицательна.

$\forall y \in (0; 5)$ левая часть $y > 0$ Ответ: $x = 3; y = 3; z = 3$.