МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Лайков Илья Алексеевич**

Технический балл: **100**

Дата: **16 февраля 2020 года**

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-2

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2024; б) 2023?

2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{80}{77}$.

3. Для каждого a решите уравнение $(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} -2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - 3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} + \operatorname{ctg} y - 4 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a, что произведение трех высот треугольника равно величине $60 + 4a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

Шифр

черновик.

① $ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac$

а) $\vdots 2024 \vdots 4$ $\quad 4ac \vdots 4 \Rightarrow b^2 \vdots 4$

$b=2k$

$4k^2-4ac=2024$

$k^2-ac=506$ — легко представляем!

27×27: 189, 54, 729 $\qquad 26\times 26$: 156, 52, 676

$70=35\cdot 2$, $7\cdot 10$ $\quad$ ~~$b=1352$~~

$b=26\cdot 2$

$ac=170$

$17\cdot 10$

б) $\vdots 2023$ mod 4 = 3

b^2 mod 4

$0^2=0$ $\quad 5^2=1$
$1^2=1$
$2^2=0$
$3^2=1$
$4^2=0$

$0-0\neq 3$
$1-0\neq 3$ не подходит

$D=2023$ не может никогда.

---

② пока медленный проходит $\frac12$ круга, быстрый проходит $\frac{80}{77}$ круга, но есть сокращает расстояние с $\frac12$ круга ~~первый~~ на

до $\frac12-\frac{3}{77}\cdot\frac{x}{2}$ (за 1 полукруг медленного)

$\frac12-\frac{3}{77}\cdot\frac{x}{2}$, где x — кол-во полукругов медленного

$0=\frac12\left(1-\frac{3x}{77}\right)=\frac12\left(\frac{77-3x}{77}\right)$ догнал

$77-3x=0$

$x=\frac{77}{3}$ — кругов после ~~полукругов~~ медленный проехал

$x=25,(6)$, но есть 25 полных

быстрый на $\frac12$ круга больше $25,(6)+0,5=26,1(6)$ то есть 26 полных

$\frac{80}{77}x-x=\frac12$

$\frac{3}{77}x=\frac12$

$x=\frac{77}{6}$

додумать!

③ Черновик

$(\log_{?} 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$

$\log_9 25 = \log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3} \neq 0$

$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3}$

$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1} + \sqrt{x^2+a^2-2a-8}} = 1$

$\log_5 3 = 1$ или $\sqrt{x-2a-1} + \sqrt{x^2+a^2-2a-8} = 0$

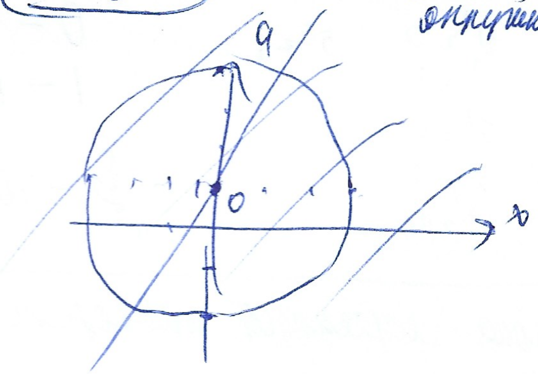
$\varnothing$

$x-2a-1=0$ или $x^2+a^2-2a-8=0$

$x = 2a+1$

$x^2+(a-1)^2 = 3^2$

окружность



$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 96 \\ 18 \\ \hline 226 \end{array}$

$(2a+1)^2 + a^2 - 2a - 8 = 0$

$4a^2 + 4a + 1 + a^2 - 2a - 8 = 0$

$5a^2 + 2a - 7 = 0$

~~$D = 16 + 4 \cdot 10 \cdot 7 = 296$~~

$D = 4 + 4 \cdot 5 \cdot 7 = 4(1+35) =$

$2^2 \cdot 6^2 = 12^2$

$a = \frac{-2 \pm 12}{10}$

$a = -1,4$

$a = 1$

Для $a = -1,4$ $x = -1,8$

$a = 1$ $x = 3$

$\forall a \notin \{1; -1,4\}$ $x \in \varnothing$

Шифр

Черновик.

(4)

$-2ab - b + |a - b - 3ab| = 0$

$\sqrt{3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0$

$3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 0 \quad 1 \cdot ab \qquad a \neq 0 \; b \neq 0$

$3ab - b + a$ ~~на~~

1) $a - b - 3ab > 0$

$-2ab - b + a - b - 3ab = 0$

$-5ab + a - 2b = 0 \qquad a(1 - 5b) = 2b \quad a = \frac{2b}{1-5b}$

$\sqrt{3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0$

$\sqrt{3 - \frac{1-5b}{2b} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0$

$\sqrt{\frac{6b - 1 + 5b + 2}{2b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0$

$\sqrt{\frac{11b + 1}{2b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0$

$\sqrt{\frac{11b+1}{2b}} = 4 - \frac{1}{b} = \frac{4b-1}{b}$

$\frac{11b+1}{2b} = \frac{16b^2 - 8b + 1}{b^2}$

$\frac{11b^2 + b - 32b^2 + 16b - 2}{2b^2} = 0$

$-21b^2 + 17b - 2 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 21 \cdot 2 < 0$ решений нет.

$\frac{4b-1}{b} > 0$

$4b - 1 = 0$

$b = \frac{1}{4} \quad b \neq 0$

$4 - \frac{1}{b} > 0$

$4 > \frac{1}{b}$

$0 < b < \frac{1}{4}$

$\frac{11b+1}{2b} > 0$

$5{,}5 + \frac{1}{2b} > 0$

> 2

$17 \cdot 7 = 119$, $119 + 17 \cdot 4 = 189$

$189 - 8 \cdot 21 = 189 - 160 - 8 = 21$

$b = \frac{-17 \pm \sqrt{21}}{-42} \qquad 4 < \sqrt{21} < 5$

(4)

Черновик

г) $\cancel{ab}\ 0$

$-2ab - b + |a - b - 3ab| = 0$

$-2ab - b - a + b + 3ab = 0$

$ab - a = 0$ $ab = a$, $b = 1$

$b = 1, a \neq 0$

$tg\, y = 1$ $y = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\sqrt{3 - \frac{1}{a} + 1} + 1 - 4 = 0$

$-\frac{1}{5} - 1 + 3\cdot\frac{1}{5}$

$b = 1$, $a = -\frac{1}{5}$ $-\frac{6}{5} + \frac{3}{5} < 0$

$\sqrt{4 - \frac{1}{a}} = 3$

$4 - \frac{1}{a} = 9$

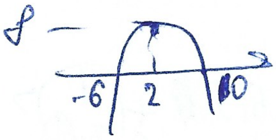
$\cancel{\frac{1}{a} = \frac{4}{9}}$ $\frac{1}{a} = -5$

$a = -\frac{1}{5}$

$x = arctg(-\frac{1}{5}) + \pi m, m \in Z$

(5) $60 + 4a - a^2 \geq 0$

$\cancel{y} = a_0 = \frac{-4}{-2} = 2$



$60 + 4\cdot 2 - 4 =$
$= 64 = 8^2$

$60 + 4\cdot 6 - 36$

$\cancel{4 - 2a =}$

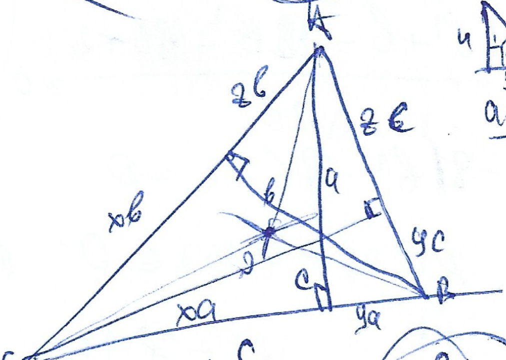
$D = 16 + 4\cdot 60 =$
$= 256 = 16^2$

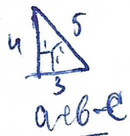
$a = \frac{-4 \pm 16}{-2} =$

$a = 10$

$a = -6$

$60 + 4a - a^2 = 0 \ldots 8$





$\frac{a+b-c}{2}$

$r = 4S$

$\frac{2}{3}$

Шифр

Черновик

$\cancel{r^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 b^2 = x0^2}$

$abc = 0, \ldots 8$

$S = \frac{1}{2} r \cdot AB + \frac{1}{2} r \cdot BC + \frac{1}{2} r AC =$

$= \frac{1}{2} r P$

$r = \frac{2S}{P} = \frac{S}{P_{полу}}$

$\cancel{S = \sqrt{P_{полу}(p-a)(p-b)(p-c)}}$

$\cancel{r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{P_{полу}}}$

при фиксированном периметре – самая большая S площадь $\Rightarrow$ и r радиус у правильной фигуры

$r_7 \quad S = \frac{1}{2} a^2 (x+y) = \frac{1}{2} b^2 (x+z) = \frac{1}{2} c^2 (y+z)$

$r = \frac{2S}{P} = \frac{a^2(x+y)}{a(x+y)+b(x+z)+c(y+z)} =$

$x+z = \frac{a^2}{b^2}(x+y)$

$y+z = \frac{a^2}{c^2}(x+y)$

$= \frac{a^2\cancel{(x+y)}}{a\cancel{(x+y)} + \frac{a^2}{b}\cancel{(x+y)} + \frac{a^2}{c}\cancel{(x+y)}} =$

$= \frac{a}{1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}}$

$r = \frac{a}{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}} = \frac{b}{1+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}} = \frac{c}{1+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}$

$r = \frac{abc}{ab+bc+ac}$

5

Черновик

$r = \frac{abc}{ab+bc+ac}$ $\qquad$ $abc = k$ — фиксированная величина

$r = \frac{k}{\frac{k}{c}+\frac{k}{a}+\frac{k}{b}}$ $\qquad$ $f(a) = \frac{k}{c}+\frac{k}{a}+\frac{k}{b}$ — min, при $abc = k$

$f'(a) = -\frac{k}{a^2}$ — убывает при фикс bc $\Rightarrow$ a — наиб.

$f'(b) = -\frac{k}{b^2}$ — убывает при фикс ac $\Rightarrow$ b — наиб

$f'(c) = -\frac{k}{c^2}$ — убывает при фикс ab $\Rightarrow$ c — наиб.

$r = \frac{k}{\frac{k}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot 3} = \frac{k^{\frac{1}{3}}}{3}$

$r = \frac{k^{\frac{1}{3}}}{3}$

r — наиб $\Rightarrow$ k — наиб

$k = 8$

$r = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{2}{3}$

$abc = k$, a — наиб, b — наиб, c — наиб

в силу симметрии $a = b = c = k^{\frac{1}{3}}$

$\frac{2^3}{2} = 2^{3-1}$

② медленный прошел круг, быстрый прошел $\frac{80}{77}$ круга, то есть 1 круг и еще $\frac{3}{77}$ круга

x — кол-во кругов первого

$\frac{1}{2} - \frac{3}{77}x = 0$

$x = \frac{77}{6} = \frac{72}{6} + \frac{5}{6} = 12\frac{5}{6}$ кругов

12 полных

быстрый прошел $\frac{80}{77} \cdot x$ кругов

$\frac{80 \cdot 77}{77 \cdot 6} = \frac{78}{6} + \frac{2}{6} = 13\frac{2}{6}$

13 полных

Чистовик (страница 1 из 5)

① а) $D = b^2 - 4ac = 2024$

Да, может $b = 52$

$a = 17$

$c = 10$

$D = 52^2 - 4\cdot 17\cdot 10 = (2\cdot 26)^2 - 4\cdot 17\cdot 10 =$

$= 4\cdot 676 - 4\cdot 17\cdot 10 =$

$= 4(676 - 170) = 4\cdot 506 = 2024$

б) 2023 имеет остаток 3 при делении на 4

$D = b^2 - 4ac$

b^2 имеет остаток 0 или 1 при делении на 4

$4ac$ имеет остаток 0 при делении на 4

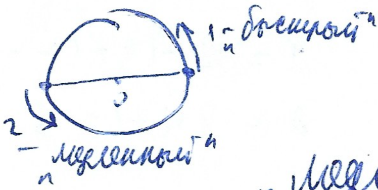
$0 - 0 \neq 3$

$1 - 0 \neq 3$ => $D = 2023$ не может быть.

Ответ: а) да, может. $a = 17$, $b = 52$, $c = 10$

б) нет, не может.

②



Независимо от их расположения «быстрый» догоняет «медленного».

«Медленный» проходит 1 круг, а «быстрый» $\frac{80}{77}$ кругов, то есть 1 круг и еще $\frac{3}{77}$ круга

Пусть x кругов прошел «медленный»

$\frac{1}{2}$ – расстояние изначальное, 0 – поравняться

$\frac{1}{2} - \frac{3}{77}x = 0$

$x = 12\frac{5}{6}$ кругов — 12 полных кругов прошел «медленный»

$x + \frac{1}{2} = 13\frac{2}{6}$ кругов — 13 полных кругов прошел ~~медленный~~ «быстрый»

Ответ: 12 и 13

Черновик (страница 2 из 5)

③ $(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$

$\log_9 25 = \log_{3^2} 5^2 = \log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$

$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = \frac{1}{(\log_5 3)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}}$

$\log_5 3 \neq 0$

$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}+\sqrt{x^2+a^2-2a-8}} = 1$

$\log_5 3 \neq 1$

$x \in \varnothing$

$\sqrt{x-2a-1} + \sqrt{x^2+a^2-2a-8} = 0$

$\begin{cases} x-2a-1=0 \\ x^2+a^2-2a-8=0 \end{cases}$ $x = 2a+1$

$(2a+1)^2+a^2-2a-8=0$

$5a^2+2a-7=0$

$D = 12^2$

$\left[\begin{array}{l} a=-1,4 \\ a=1 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} x = 2(-1,4)+1 = -1,8 \\ x = 2\cdot 1+1 = 3 \end{array}$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll} \forall a \notin \{-1,4; 1\} & x \in \varnothing \\ a=-1,4 & x=-1,8 \\ a=1 & x=3 \end{array}\right.$

④ для упрощения: $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{tg} y = b$; $a, b \neq 0$

$\begin{cases} -2ab - b + |a-b-3ab| = 0 \\ \sqrt{3-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{b} - 4 = 0 \end{cases}$ (*)

$3 - \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 0$

$\frac{3ab-b+a}{ab} \geq 0$

при $ab > 0$ $3ab-b+a \geq 0$

при $ab < 0$ $3ab-b+a \leq 0$

Чистовик (страница 3 из 5)

1) $a-b-3ab\geq 0$

$-2ab-b+a-b-3ab=0$

$-5ab-2b+a=0$

$a=\frac{2b}{1-5b}$ в (*)

$\sqrt{3-\frac{1-5b}{2b}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{b}-4=0$

$\sqrt{\frac{11b+1}{2b}}=4-\frac{1}{b}\ \left(=\frac{4b-1}{b}\right)$

возводим в квадрат, $\frac{4b-1}{b}\geq 0$ $0<b\leq\frac{1}{4}$

$\frac{11b+1}{2b}=\frac{16b^2-8b+1}{b^2}$

$\frac{-32b^2+11b^2+16b+b-2}{2b^2}=0$

$-21b^2+17b-2=0$ $b\neq 0$

$D=21$

$b=\frac{-17\pm\sqrt{21}}{-42}$

$b=\frac{-17-\sqrt{21}}{-42}>\frac{1}{4}$, не подходит.

$b=\frac{-17+\sqrt{21}}{-42}$, $17>\sqrt{21}$

$b=\frac{-17+\sqrt{21}}{-42}$ $4<\sqrt{21}<5$

$-42b+17=\sqrt{21}$ $4<-42b+17<5$

$-13<-42b<-12$

$\frac{1}{4}<\frac{12}{42}<b<\frac{13}{42}$

корней нет.

2) $a-b-3ab\leq 0$ (**)

$-2ab-b-a+b+3ab=0$

$ab-a=0$

$b=1,\ a\neq 0$ подставляем в (*)

$\sqrt{3-\frac{1}{a}+1}+1-4=0$

Чистовик (страница 4 из 5)

$\sqrt{4-\frac{1}{a}}=3$

$a=-\frac{1}{5}\quad b=1$

проверка (подставим в (**)) $-\frac{1}{5}-1-3\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 1=$

$=-\frac{6}{5}+\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}<0$

удовлетворяет условию

$\begin{cases} \operatorname{tg} x=-\frac{1}{5} \\ \operatorname{tg} y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)+\pi n, n\in Z \\ y=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)+\pi n, n\in Z \\ y=\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in Z \end{cases}$

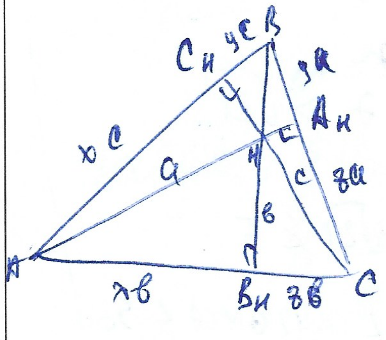
5) $k=60+4a-a^2$ – парабола, ветви вниз

$a_0=\frac{-4}{-2}=2$

$k_0=60+4\cdot 2-2^2=64$

$k\in(0;64]$, $k=\bar{a}bc$, где a, b и c – высоты треугольника

(другая a, не связанная с значением из условия)



из подобия $\triangle ABB_н$ и $\triangle ACC_н$:

$AC_н=xc$, $AB_н=xb$

из подобия $\triangle BCC_н$ и $\triangle BAA_н$:

$BC_н=yc$, $BA_н=ya$

из подобия $\triangle CAA_н$ и $\triangle CBB_н$:

$CA_н=za$, $CB_н=zb$

$S=\frac{1}{2}a^2(y+z)=\frac{1}{2}b^2(x+z)=\frac{1}{2}c^2(x+y)$

$r=\frac{2S}{P}=\frac{a^2(y+z)}{a(y+z)+b(x+z)+c(x+y)}$

$x+y=\frac{a^2}{c^2}(y+z)$

$x+z=\frac{a^2}{b^2}(y+z)$

Чистовик (страница 5 из 5)

$$r = \frac{a^2(\cancel{y+c})}{a(\cancel{y+b}) + \frac{a^2}{b}(\cancel{y+b}) + \frac{a^2}{c}(\cancel{y+c})}$$

$$r = \frac{a}{1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}}$$ ~~abc~~

$$r = \frac{abc}{ab+bc+ac} \qquad r = \frac{k}{\frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}}$$

r - наиб $\Rightarrow \frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}$ — наим при фиксированном $k \in [0;64]$

$$f(a,b,c) = \frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}$$

$f'(a) = -\frac{k}{a^2} < 0$ — убывает при фиксированных b и c $\Rightarrow$ a - наиб

$f'(b) = -\frac{k}{b^2} < 0$ убывает при фиксированных a и c $\Rightarrow$ b - наиб

$f'(c) = -\frac{k}{c^2} < 0$ — убывает при фиксированных b и c $\Rightarrow$ c - наиб

$f(a,b,c) - \frac{k}{a}+\frac{k}{b}+\frac{k}{c}$ — наим при наиб. a, наиб. b, наиб. c, при том, что $abc = k$

Следовательно $a = b = c = (k)^{\frac{1}{3}}$

$$r = \frac{k}{3\frac{k}{(k)^{\frac{1}{3}}}} = \frac{(k)^{\frac{1}{3}}}{3}$$

r - наиб $\Rightarrow$ k - наиб $\Rightarrow k = 64$

$r = \frac{(64)^{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{4}{3}$ — наибольший радиус вписанной окружности

Ответ: $\frac{4}{3}$