МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ладнев Алексей Ильич**

Технический балл: **85**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты AB2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

№1

$b_1 \quad b_1 \cdot q \quad b_1 \cdot q^2 \quad b_1 \cdot q^3 \quad b_1 \cdot q^4 \quad b_1 \cdot q^5$

$$\begin{cases} \underbrace{b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3}_{4} = 30 \\ \underbrace{q^2 (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3)}_{4} = 120 \end{cases}$$

$\Rightarrow q^2 = 4$

$\Rightarrow q = \pm 2$

1) $q = 2$

$b_1(1 + 2 + 4 + 8) = 120$

$b_1(15) = 120 \Rightarrow b_1 = 8$

$b_4 = b_1 \cdot q_3 = 8 \cdot 2^3 = 64$

2) $q = -2$

$b_1(1 - 2 + 4 - 8) = 120$

$b_1(-5) = 120 \Rightarrow b_1 = -24$

$b_4 = b_1 \cdot q^3 = -24 \cdot -8 = 192$

Ответ: 64 ; 129

$$\sqrt{2}$$

$$\sin \frac{\pi x}{2} = \sin(2x^\circ) = \sin\left(\frac{2x\pi}{180}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \frac{2x\pi}{180} + 2\pi n \\ \frac{\pi x}{2} = \pi - \frac{2x\pi}{180} + 2\pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{90} + 4n \\ x = 1 - \frac{x}{90} + 4k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{90}\right)x = 4n \\ \left(1 + \frac{1}{90}\right)x = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{180n}{89} \\ x = \frac{90(2k+1)}{91} \end{cases}$$

1) - рассмотрим разные серии:

$$\left| \frac{180n}{89} - \frac{90(2k+1)}{91} \right| \to \min$$

1) Рассмотрим $\frac{180n}{89} - \frac{90(2k+1)}{91} > 0$

$$\frac{180n}{89} - \frac{90(2k+1)}{91} \to \min$$

Разделим на 90 и домножим на $89 \cdot 91$

$$182n - 89 - 178k \Rightarrow \min$$

$$2(91n - 89k) - 89 = a \Rightarrow \min$$

$a = 1$ - минимальное, так что k и n при которых $a = 1$ - оптимальный вариант

$2(91n - 89k) - 89 = 1$

$2(91n - 89k) = 90$

$182n - 178k$ принимает все значения кратные $НОД(182; 178) = 2 \Rightarrow$ так же принимается 90 $\Rightarrow$ решение есть $\Rightarrow$

Получается $182 - 89 - 178k = 1$

$\Rightarrow \frac{180n}{89} - \frac{90(2k+1)}{91} = \frac{90}{89 \cdot 91}$

2) для случая $\frac{180n}{89} - \frac{90(2k+1)}{91} < 0$ ответ получается равный по модулю, но с другим знаком, таким что ответ такой же

3) Рассмотрим расстояние между соседними в одной серии:

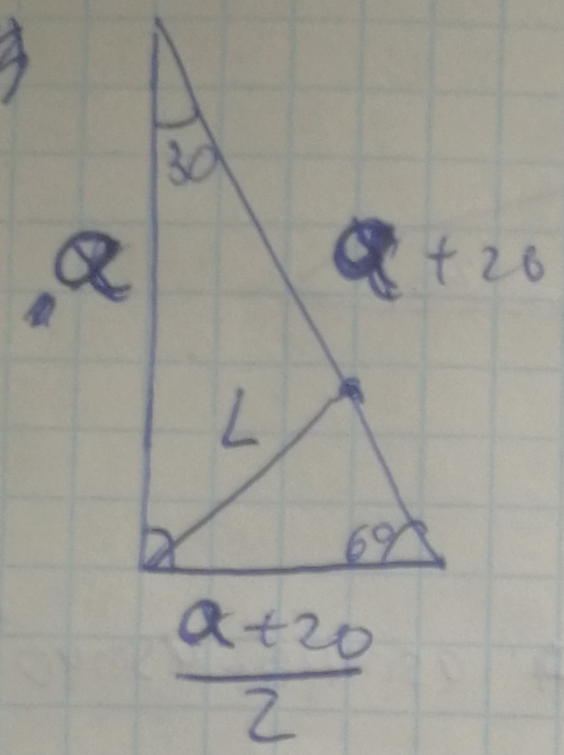
1) $\left| \frac{180n}{89} - \frac{180(n+1)}{89} \right| = \frac{180}{89}$

2) $\left| \frac{90(2k+1)}{91} - \frac{90(2k+3)}{91} \right| = \frac{180}{91}$

$\Rightarrow \frac{90}{89 \cdot 91}$ - наименьшее

Ответ: $\frac{90}{89 \cdot 91}$

Задача: №3



1) $(a+20)\cdot \sin 60 = a$

$(a+20)\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$

$a\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{3} = a$

$\frac{a\sqrt{3}-2a}{2} + 10\sqrt{3} = 0$

$10\sqrt{3} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2} \Rightarrow a = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

2) $\frac{a+20}{2} = \frac{a}{2} + 10 = \frac{10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + 10 =$

$= \frac{10\sqrt{3} + 20 - 10\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{20}{2-\sqrt{3}}$

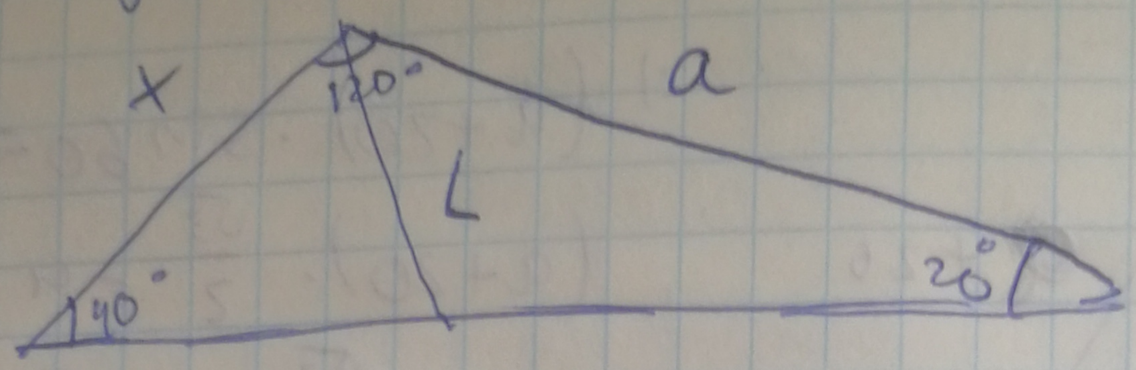
$L = \frac{2a\left(\frac{a}{2}+10\right)\cos 45^\circ}{a+\frac{a}{2}+10} = \frac{800\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})}{(7-2\sqrt{3})\cdot(20+20\sqrt{3})}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1600\sqrt{3}-2400}{(1+5\sqrt{3})\,20\sqrt{2}} = \frac{1600\sqrt{3}-2400}{20\sqrt{2}+400\sqrt{6}} = \frac{80\sqrt{3}-120}{\sqrt{2}+5\sqrt{6}}$

$\frac{40\sqrt{6}-60\sqrt{2}}{1+5\sqrt{3}} =$

$= \frac{40\sqrt{6}-60\sqrt{2}}{1+5\sqrt{3}}$

2 случай:



$a+20$

$$\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{a+20}{\sin 120^\circ} \Rightarrow a\sin 120^\circ = a\sin 40^\circ + 20\sin 40^\circ$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right) = 20\sin 40^\circ$$

$$\Rightarrow a = \frac{20\sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}$$

$$\frac{x}{\sin 20} = \frac{a}{\sin 40} \Rightarrow x = \frac{a\sin 20}{\sin 40}$$

$$L = \frac{2\cdot\frac{a\sin 20}{\sin 40}\cdot a\cdot\cos 60^\circ}{\frac{a\cdot\sin 20}{\sin 40} + a} =$$

$$= 2\cdot\frac{20\sin 20^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}\cdot\frac{20\sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{20\sin 20}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ} + \frac{20\sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}}{} =$$

$$= \frac{400\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right)^2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ}{20(\sin 20 + \sin 40)} = \frac{20\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right)(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ)}$$

~4

$3x^3+(3a+4)x^2+(2a+3)x-a+2=0$

Заметим, что $x=-1$ подходит при любых a.

Поделим исходный многочлен на $(x+1)$:

$(x+1)\,|\,(3x^2+(3a+1)x+(2-a))=0$

$\Rightarrow 3x^2+(3a+1)x+(2-a)=0$ должно

иметь два различных корня $\neq -1$

и хотя бы один из них должен

быть целым.

$D=(3a+1)^2-4\cdot 3\cdot(2-a)=9a^2+6a+1-24+12a=$

$=9a^2+18a-23>0$

$D_1'=324+4\cdot 9\cdot 23=1152$

$\Rightarrow a_1,a_2=\frac{-18\pm\sqrt{1152}}{18}=-1\pm\frac{\sqrt{1152}}{18}$

$\Rightarrow a\in(-\infty;-1-\frac{\sqrt{1152}}{18})\cup(-1+\frac{\sqrt{1152}}{18};+\infty)$

$33<\sqrt{1152}<34$

$\Rightarrow 1<\frac{\sqrt{1152}}{18}<2$

$\Rightarrow$ для целых a: $a\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$

$$\begin{cases} x_1, x_2 = \dfrac{-(3a+1) \pm \sqrt{9a^2+18a-23}}{6} \\ x_1 \neq x_2 \neq -1 \end{cases}$$

Чтобы x_1 или x_2 были целыми, надо

$\sqrt{9a^2+18a-23} \in \mathbb{Z}$

Проверим для $a \in [-6;-2] \cup [1;5]$

1) $a=-6$:

$9 \cdot 36 + 18 \cdot (-6) - 23 = 193$

$\sqrt{193} \notin \mathbb{Z}$

2) $a=-5$

$9 \cdot 25 + 18(-5) - 23 = 112$

$\sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$

3) $a=-4$

$9 \cdot 16 + 18(-4) - 23 = 49$

$\sqrt{49} = 7 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(-12+1) \pm 7}{6} = \dfrac{11 \pm 7}{6} = 3; \dfrac{2}{3}$

4) $a=-3$

$9 \cdot 9 + 18(-3) - 23 = 4$

$\sqrt{4} = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(-9+1) \pm 2}{6} = \dfrac{8 \pm 2}{6} = 1; \dfrac{5}{3}$

5) $a=-2$:

$9 \cdot 4 + 18(-2) - 23 < 0$

$\Rightarrow$ не подходит

6) $a=1$:

$9 \cdot 1 + 18 \cdot 1 - 23 = 4$

$\sqrt{4} = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-(3+1) \pm 2}{6} = \dfrac{-4 \pm 2}{6}; -1; -\dfrac{2}{3}$

7) $a=2$:

$9 \cdot 4 +$

$\sqrt{49} =$

8) $a=3$

$9 \cdot 9 -$

$\sqrt{112}$

9) $a =$

$9 \cdot 1$

$\sqrt{193}$

10) $a =$

$9 \cdot$

$\sqrt{29}$

Поск

пол

ир

$\Rightarrow$

Вер

Ответ

7) $a=2$:

$9 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 23 = 49$

$\sqrt{49} = 7 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(6+1) \pm \sqrt{7}}{6} = \frac{-7 \pm 7}{6} = 0;\ \frac{7}{3}$

8) $a=3$

$9 \cdot 9 + 18 \cdot 3 - 23 = 112$

$\sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$

9) $a=4$:

$9 \cdot 16 + 18 \cdot 4 - 23 = 193$

$\sqrt{193} \notin \mathbb{Z}$

10) $a=5$

$9 \cdot 25 + 18 \cdot 5 - 23 = 225 + 90 - 23 = 315 - 23 = 292$

$\sqrt{292} \notin \mathbb{Z}$

Получается, что при $a = -4; -3; 1; 2$ он получит как минимум 2 целых корня, но при $a=1$ у него совпадут два корня

$\Rightarrow a=1$ - не подходит

$\Rightarrow$ подходят $a = -4; -3; 2$

Вероятность $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ответ: 0,25

№5

Рассмотрим слова без последней буквы „А"
получается 20-буквенное слово:
АВ...В, состоящее из „АВ" и „АВВ"
т.к. всего букв - четное кол-во, то и
„АВВ" тоже чётно
⇒ от 0 до 6, т.к. 7-3 > 20
Посчитаем кол-во слов для каждого
кол-ва „АВВ"

1) „АВВ" - 0
20 - 0 = 20
„АВ" = 20 : 2 = 10
$C_{10}^{0} = 1$

2) „АВВ" - 2
20 - 2·3 = 14
„АВ" = 14 : 2 = 7
$C_9^2 = 55$

3) „АВВ" - 4
20 - 3·4 = 8
„АВ" = 8 : 2 = 4
$C_8^4 = 70$

4) „АВВ" - 6
20 - 6·3 = 2
„АВ" = 2 : 2 = 1
$C_7^1 = 8$

1 + 55 + 70 + 8 = 134

Ответ: 134