



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мохова Мария Андреевна**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 4)x^2 - (2a - 3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

б 4 Вариант I.

$$3x^2 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a+2 = 0$$

подставим $x = -1$:

$$-3 - 3a + 4 + 2a - 3 + a + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ будет корнем уравнения вида.}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a+2 \\ - 3x^2 + \quad \quad 3x^2 \\ \hline (-3a+4-3)x^2 - (2a+3)x + a+2 \\ - (-3a+1)x^2 + (-3a+1)x \\ \hline (a+2)x + a+2 \\ - (a+2)x + a+2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3x^2 + (-3a+1)x + a+2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 6a + 1 - 12a - 24 = 9a^2 - 18a - 23$$

$$x_{2,3} = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-18a-23}}{6}$$

Если $\sqrt{9a^2-18a-23} \in \mathbb{Z}$ то $\frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-18a-23}}{6} \notin \mathbb{Z}$ т.к. $3a-1 \in \mathbb{Z}$

a	$9a^2-18a-23$	$\sqrt{9a^2-18a-23}$	x_1	x_2	x_3	Удовлетворяет ли условию
-5	338	$\sqrt{338}$	-1	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$	X
-4	196	14	-1	$\frac{-12-1+14}{6} \notin \mathbb{Z}$	$\frac{-12-1-14}{6} \notin \mathbb{Z}$	X
-3	122	$\sqrt{122}$	-1	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$	X
-2	49	7	-1	$\frac{-6-1+7}{6} = 0$	$\frac{-6-1-7}{6} = -\frac{7}{3}$	✓
-1	4	2	-1	$\frac{-3-1-2}{6} = -1$	$\frac{-3-1+2}{6} = -\frac{1}{3}$	X
0	-23	$\emptyset$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$	X
1	-32	$\emptyset$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$	X
2	-23	$\emptyset$	-1	$\emptyset$	$\emptyset$	X
3	4	2	-1	$\frac{9-1-2}{6} = 1$	$\frac{9-1+2}{6} = \frac{5}{3}$	✓
4	49	7	-1	$\frac{12-1+7}{6} = 3$	$\frac{12-1-7}{6} = \frac{2}{3}$	✓
5	122	$\sqrt{122}$	-1	$\notin \mathbb{Z}$	$\notin \mathbb{Z}$	X
6	196	14	-1	$\frac{18-1+14}{6} \notin \mathbb{Z}$	$\frac{18-1-14}{6} \notin \mathbb{Z}$	X

$$\text{Вероятность} = \frac{3}{12} = 0,25$$

Ответ: 0,25

2

№5 (Продолжение)

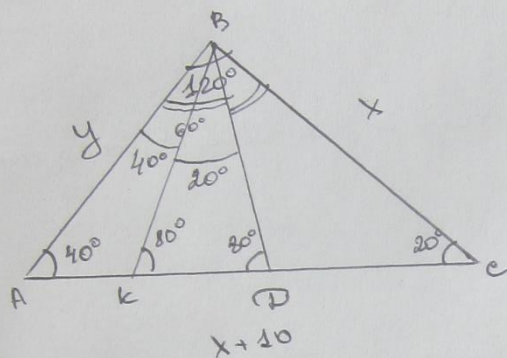
II

пусть

III угол = $6x$

$$9x = 180^\circ$$

$$x = 20^\circ$$



пусть BD — биссектриса
 $\angle ABD = 60^\circ : 2 = 30^\circ \Rightarrow \angle ADB = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$
 $\angle AKB = 180 - 2 \cdot 40 = 100$
 $\angle BKD = 180 - 80 = 100$

проведем BK так что $\angle ABK = 40^\circ$

$\triangle AKB$ — равнобедр $\Rightarrow AK = BK$

$\triangle AKD$ — равнобедр (по углам) $\Rightarrow BK = BD \Rightarrow AK = BD$

$\angle CBK = \angle ABC - \angle ABK = 120 - 40 = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC$ равнобедр $\Rightarrow KC = BC = x$

Т.к. $AC = x + 10$ $BC = KC = x$ то $AK = 10 \Rightarrow BD = 10$

Ответ: 10; $15\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

N 3

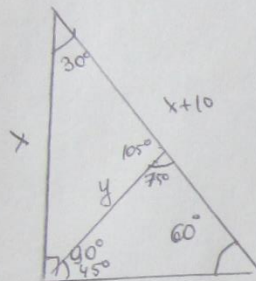
пусть $\begin{cases} I \text{ угол} = d \\ II \text{ угол} = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} III \text{ угол} = 3d \\ IV \text{ угол} = 6d \end{cases}$

I. пусть $III \text{ угол} = 3d$

$$d + 2d + 3d = 180^\circ$$

$$d = 30^\circ$$

т.к. против большего угла лежит большая сторона



$$x : \sin 60 = x + 10$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x = x + 10$$

$$(2 - \sqrt{3})x = 10\sqrt{3}$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

по т. синусов:

$$\frac{x}{\sin 105^\circ} = \frac{y}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(60 + 45) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 2 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{20\sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} =$$

$$= 15\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$$

155. Вариант I

Заметим, что сочетание букв "ББ" меняет четность позиций А (если до "ББ" "А" стояли на четных позициях, то будут после "ББ" стоять на четных и наоборот).
 Т.к. у нас 20 букв и "А" должна быть на 1-ой и 20-ом месте $\Rightarrow$ всего должно быть нечетное кол-во "ББ".
 Будем считать возможные наборы из букв Б (стоящих в начале и в конце) а пропуски между ними и по краям "заполнять" ровно одной буквой А.

I. "ББ" - 1 шт
 "Б" - 8 шт

АББАБАБАБАБАБАБАБАБАБА

Заметим "ББ" на С, уберем в А и посмотрим, сколько способов можно поставить Б и С: $9! : 8! : 1! = 9$.

II. С = "ББ" - 3 шт
 "Б" - 5 шт

АББАББАББАББАБАБАБАБА

аналогично расставим Б и С, заполним пропуски между ними:
 $(3+5)! : 5! : 3! = 6 \cdot 7 \cdot 8 : 6 = 56$.

III. С = "ББ" - 5 шт
 "Б" - 2 шт.

АББАББАББАББАББАБАБАБА

аналогично : $(5+2)! : 5! : 2! = 6 \cdot 7 \cdot 2 = 21$

Если будет ≥ 7 "ББ" то нам надо ≥ 8 "А" $\Rightarrow$ букв будет > 20 .
 Суммируем: $9 + 21 + 56 = 86$

Ответ: 86

Вариант I.

вс1.

пусть a — первый член прогрессии
 q — знаменатель прогрессии

Тогда члены равны:

$$a; aq; aq^2; aq^3; aq^4; aq^5$$

По условию:

$$\frac{a+aq+aq^2+aq^3}{4} = 15 \quad ; \quad \frac{aq^2+aq^3+aq^4+aq^5}{4} = 60$$

$$\text{т.к. } a(1+q+q^2+q^3) \neq 0$$

$$\frac{aq^2(1+q+q^2+q^3)}{a(1+q+q^2+q^3)} = \frac{60}{15}$$

$$q^2 = 4$$

$$q = \pm 2$$

при $q = -2$

$$a(1-2+4-8) = 15 \cdot 4$$

$$a = 60 : (-5)$$

$$a = -12$$

$$aq^5 = (-12) \cdot (-2)^5 = 12 \cdot 32 = 384$$

$$\text{Ответ: } \{384; 128\}$$

при $q = 2$

$$a(1+2+4+8) = 15 \cdot 4$$

$$a = 4$$

$$aq^5 = 4 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$$

вс2.

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

$$3x^\circ = \frac{3x \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{x\pi}{60}$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{x\pi}{60}\right)$$

$$\text{I. } \pi x = \frac{x\pi}{60} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$60x = x + 120k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{120k}{59} \quad k \in \mathbb{Z}$$

минимальное расстояние
 между корнями этой
 серии — $\frac{120}{59}$

$$\text{II. } \pi x = \pi - \frac{x\pi}{60} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$60x = -x + 120n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{120n}{61} \quad n \in \mathbb{Z}$$

(минимальное расстояние между корнями
 этой серии — $\frac{120}{61}$)

Найдём минимальное расстояние между корнями разных серий:

$$0 < \left| \frac{120k}{59} - \frac{60+120n}{61} \right| = \min$$

$$0 < \left| \frac{120k}{59} - \frac{1+2n}{61} \right| = \min$$

$$0 < \frac{|122k - 118n - 59|}{59 \cdot 61} = \min$$

т.к. $k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}; 122k - 118n - 59 \neq 0$, то $|122k - 118n - 59| = 1$ минимальное значение
 пример: $n = 15 = m$ $|15(122 - 118) - 59| = 1$
 $\min = \frac{60}{59 \cdot 61} = \frac{60}{(60+1)(60-1)} = \frac{60}{60^2 - 1} = \frac{60}{3599}$ (это значение $\frac{60}{59}$ и $\frac{120}{61}$)

Ответ: $\frac{60}{3599}$