МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Воротилин Богдан Александрович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)\ ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

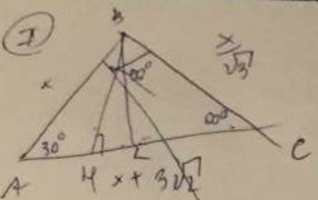
4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6;5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

(1)



$BC = tg\,30° \cdot BA = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Т. Пифагора.

$x^2 + \frac{x^2}{3} = (x+3\sqrt{2})^2$ т.к $x>0 \Rightarrow x+3\sqrt{2}>0$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3\sqrt{2})$

$x \cdot (1-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{2}$ $\quad x = \frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} = AB$

$BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}}$

$BL = \sqrt{AB \cdot BC - LA \cdot LC} = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2\cdot\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2} \cdot AC^2}$

$\frac{LA}{LC} = \sqrt{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow LA = \sqrt{3}\,LC$

$AL = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot AC \qquad LC = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot AC$

$AC = \frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\left(\frac{2+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{4-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{2}$

$BL = \sqrt{\sqrt{3}\left(\frac{24}{1} - 18\frac{(4-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}+1)^2 \cdot (2-\sqrt{3})^2}\right)} =$

$= \sqrt{\sqrt{3} \cdot 6\left(4 - 3\frac{(4-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-1)^2}\right)} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 6\left(4 - 3 \cdot \frac{19-8\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}\right)} =$

$= \sqrt{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{16\sqrt{3}-41}{4-2\sqrt{3}}}$

читать стр 10

стр 6

Т.е потенциальных очек всего 3 – $\{-1; -2; -6\}$

$a=-1$: $f(x; -1) = 3x^2+7x -(-1)-1 = 0 = 3x^2+7x$

$x=0$ – корень целый отличный от $x=-1$

$a=-2$: $f(x; -2) = 3x^2+4x+1$ – корни -1 и $-\frac{1}{3}$

не подходит :((т.к $-1=-1$)

$a=-6$: $3x^2 \cancel{+} - 8x + 5$ $\quad x = 1$ – корень $\in \mathbb{Z}$, $\neq -1$

всего „нужных" очек две

всего очек 12

$P(1) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

стр 8

№5

∃ $F(n)$ – кол-во слов по правилам из условия

Заметим рекурренту. ($n > 6$)

$$F(n) = F(n-4) + 2F(n-5) + F(n-6)$$

∃ Докажем это пусть у нас есть слово T

По бокам у T – Ошки из-за того, что не бывает OO на 3 и 4 буква T

_ _ _ | ① . . . ① | _ _ _

1 2 3 4 . . . 4 5 6

граница

Теперь мы знаем, что по бокам у слова Ошки ⇒ 6 и 1 – Ошки на 5 и на 2 может быть как T и прочерк если там две прочерки присвоим такому случаю $F(n-4)$

если $\underset{2}{T}\ \underset{5}{/}$ и $\underset{2}{/}\ \underset{5}{T}$ · присвоим $2F(n-5)$

если $\underset{2}{T}\ \underset{5}{T}$ то $F(n-6)$

~~Заметим что нужно контролировать ...~~

№4

Заметим, что $\forall a \in \mathbb{R}$ $x=-1$ – корень. Проверка:

$-3+3a+13-2a-9-a-1 \equiv 0$ $\qquad Y=[-6;5]$

$3x^3+(3a+13)x^2+(2a+9)x-a-1=0$ $\qquad a \in Y$

$\Updownarrow$

$(x+1)(3x^2+(3a+10)x-a-1)=0$

т.к для выполнения условия нужно чтобы выполнялось условие ~~нужно чтобы~~ для $(3x^2+(3a+10)x-a-1)$ ($\stackrel{\text{"}}{F(x,a)}$) имело хотя бы 1 целый корень отличный от -1

$D=(\underbrace{3a+12}_{x})^2-32=y^2$, $y\in\mathbb{Z}$ т.к иначе корни будут не целыми.

$x^2-y^2 \stackrel{=(x-y)(x+y)}{=} 32$ $\qquad x,y\in\mathbb{Z}$ $\qquad \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow$ решение $(x,y)\ \exists$ всегда.

$(x-y;x+y)$ $\qquad (x-y;\ x+y)$

1 $\quad$ 32 $\quad 2x=33$, $x\notin\mathbb{Z}$ $\quad$ -1 $\quad -32$ $\quad 2x=-33$, $x\notin\mathbb{Z}$

2 $\quad$ 16 $\quad 2x=18\Rightarrow x=9\Rightarrow a=-1$ $\quad -2$ $\quad -16$ $\quad 2x=-18\Rightarrow x=-9\Rightarrow a=-7$ $\quad a\notin Y$

4 $\quad$ 8 $\quad 2x=12\Rightarrow x=6$ $\quad a=-2$ $\quad -4$ $\quad -8$ $\quad 2x=-12\Rightarrow x=-6$ $\quad a=-6$

8 $\quad$ 4 $\quad 2x=12$ $\qquad -8$ $\quad -4$ $\quad$ <//>

16 $\quad$ 2 $\quad 2x=18$ <//> $\quad -16$ $\quad -2$

32 $\quad$ 1 $\quad 2x=33$ $\qquad -32$ $\quad -1$ $\quad$ <//>

Теперь построим биекцию этих случаев на наши присваивания. Возьмём слово из n и разделим его на 3 части

$$\overset{I}{\overbrace{O\,T\ldots}}\ \overset{II}{\overbrace{O\ \ldots\ O}}\ \overset{III}{\overbrace{T\ldots O}}$$

А теперь поймём, что мы $\forall x \in F(n)$

$x \overset{bi}{\longleftrightarrow} x' \in F(n-k)$, k – кол-во букв в I + III части

Теперь посмотрим на начальные условия:

$F(1) - 1$ $- O -$

$F(2) - 0$ $-$

$F(3) - 1$ $- OTO -$

$F(4) - 1$ $- OTTO -$

$F(5) - 1$ $- OTOTO -$

$F(6) - 2$ $- OTTOTO - / - OTOTTO -$

А дальше руками считать...

$F(7) = \underbrace{F(3)}_{1} + 2\underbrace{F(2)}_{0} + \underbrace{F(1)}_{1} = 2$

$F(8) = \underbrace{F(4)}_{1} + 2\underbrace{F(3)}_{1} + \underbrace{F(2)}_{0} = 3$

$F(9) = \underbrace{F(5)}_{1} + \underbrace{2F(4)}_{2} + \underbrace{F(3)}_{1} = 4$

$F(10) = \underbrace{F(6)}_{2} + \underbrace{2F(5)}_{2} + \underbrace{F(4)}_{1} = 5$

$F(11) = \underbrace{F(7)}_{2} + \underbrace{2F(6)}_{4} + \underbrace{F(5)}_{1} = 7$

см стр 11

(Закончилось место А4) Продолжение задачи №5 точнее до нужного счёта...

$$F(12) = \underbrace{F(8)}_{3} + \underbrace{2F(7)}_{4} + \underbrace{F(6)}_{2} = 9$$

$$F(13) = \underbrace{F(9)}_{4} + \underbrace{2F(8)}_{6} + \underbrace{F(7)}_{2} = 12$$

$$F(14) = \underbrace{F(10)}_{5} + \underbrace{2F(9)}_{8} + \underbrace{F(8)}_{3} = 16$$

$$F(15) = \underbrace{F(11)}_{7} + \underbrace{2F(10)}_{10} + \underbrace{F(9)}_{4} = 21$$

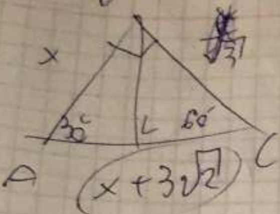
$$F(16) = \underbrace{F(12)}_{9} + \underbrace{2F(11)}_{14} + \underbrace{F(10)}_{5} = 28$$

$$F(17) = \underbrace{F(13)}_{12} + \underbrace{2F(12)}_{18} + \underbrace{F(11)}_{7} = 37$$

$$F(18) = \underbrace{F(14)}_{16} + \underbrace{2F(13)}_{24} + \underbrace{F(12)}_{9} = 49$$

$$F(22) = \underbrace{F(18)}_{49} + \underbrace{2F(17)}_{74} + \underbrace{F(14)}_{28} = 151$$

Ответ: 151.



$\frac{AB}{AC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2x = \sqrt{3}(x + 3\sqrt{2})$

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{3}) = 6\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$

$BC = tg30 \cdot x = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$

$AC = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{6} = \cancel{x} + 3\sqrt{2}$

$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AL = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot AC$

$LC = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot AC$

$BL = \sqrt{AB \cdot BC - AL \cdot LC}$

формула биссектрисы.

$= \sqrt{(6\sqrt{2} + 3\sqrt{6})(2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) - AC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}}$

$36 + 36 + 36\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$

$72 + 60\sqrt{3}$

$AC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{AC^2 \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}-1)^2}{4} = \frac{AC^2}{2}(2\sqrt{3} - 3)$

$AC^2 = 216 + 108 \cdot \sqrt{3} \quad \cdot \frac{AC^2}{2} = (108 + 54\sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3)$

$BL = \sqrt{72 + 60\sqrt{3} + 324 - 324 + 162\sqrt{3} - 216\sqrt{3}}$

$= \sqrt{72 + 6\sqrt{3}}$

Вариант 4.

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ a & qa & q^2a & q^3a & q^4a & q^5a \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = 4\cdot 10$$

$$\sum_{i=3}^{6} b_i = 90\cdot 4$$

Заметим, что (1) $\sum_{i=3}^{6} b_i = q^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} b_i \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$

Теперь ~~мы~~ будем подставлять.

$q = 3$

$a + 3a + 9a + 27a = 40a = 40 \Rightarrow a = 1$

$q^5 a = 3^5 \cdot 1 = b_6$

$q = -3$

$a - 3a + 9a - 27a = -20a = 40 \Rightarrow a = -2$

$q^5 a = -2 \cdot (-3)^5 = 2 \cdot 3^5$

А проверять, что при $(a; q)$ условие, что последние 4 члена имеют ср. арифм. $= 90$ не нужно (т.к следует из (1)).

Ответ: 3^5, $2\cdot 3^5$

243, 486

стр 1

№2

$\sin(\pi x) = \sin(5x^{\circ})$ Заметим, что $x^{\circ} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow 5x_0 = \frac{\pi}{36}$

$\sin(\pi x) = \sin(\frac{\pi}{36}x) \Leftrightarrow \sin(\pi x) - \sin(\frac{\pi}{36}x) = 0$ (1)

Воспользуемся формулой разности синусов:

$(1) \Leftrightarrow 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \frac{\pi}{36}x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x - \frac{\pi}{36}x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi x + \frac{\pi}{36}x}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x - \frac{\pi}{36}x}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}\pi \cdot \frac{37}{36} = \frac{\pi}{2} + \pi k_2 \\ \pi \frac{x}{2} \cdot \frac{35}{36} = \pi k_1, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \cdot \frac{37}{36} = 1 + 2k_2 \\ x \cdot \frac{35}{36} = 2k_1 \end{array}\right.$ справа целые (при k_2 нечётные / при k_1 чётные) числа, значит и слева должны быть числа из этих же групп.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{36}{37} \cdot C_1, \quad C_1 \vdots 2 \\ x = \frac{36}{35} \cdot C_2, \quad C_2 \vdots 2 \end{array}\right. \Rightarrow x = 36k, \; k \in \mathbb{Z}$

пусть $\exists$ x_0, x_1 – корни, ~~тогда $|x_0 - x_1| = 36n \neq 0 \Rightarrow |x_0 - x_1| \geq 36 \Rightarrow$ Ответ: 36~~

Тогда корни могут быть из одной серии или из разных.

Если они из одной, то модуль их разности

$\frac{36}{37} k_1, \; \frac{36}{35} k_2, \; k_1; k_2 \in \mathbb{Z}$

см 3 стр

стр 2

~~стр 4~~

на стр 8

но они могут быть из ~~одн~~ разных серий:

$$|x_0 - x_1| = \left|\frac{36}{37}c_1 - \frac{36}{35}c_2\right| = \frac{36}{37\cdot 35}\cdot|35c_2 - 37c_1|$$

утверждаю, что $\min\limits_{\substack{c_2, c_1 \in \mathbb{Z} \\ \vdots 2 \quad \vdots 2}} |35c_2 - 37c_1| = 1$

этому ничего не противоречит т.к мы знаем, что $ax + by = z$ имеет решение если $z \vdots (a, b)$ относительно (x, y) найдем тривиальное решение. $c_2 = c_1 = 19$

$|35c_2 - 37c_1| = 38$ теперь к c_1 прибавим 1

$c_2 = 19$ $c_1 = 20$ $|35c_2 - 37c_1| = 1$

$(c_2; c_1) \to (c_2 + 37; c_1 + 35)$

$(19; 20) \to (\underset{\vdots 2}{19 + 37}; \underset{\cancel{\vdots 2}}{20 + 35})$ что подходит условию.

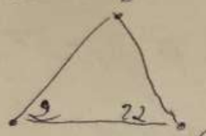
Ответ: $\frac{36}{37\cdot 35}$

Страница 3

$BC = tg\,30° \cdot BA = \frac{x}{\sqrt{3}}$

т. Пифагора.

BL - биссектриса.

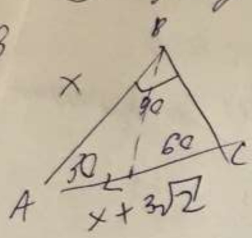


let $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACB = 2\alpha$

Тогда из условия следует, что $ABC \overset{(I)}{=} 3\alpha \overset{(II)}{=} 6\alpha$

и $AC = AB + 3\sqrt{2}$

(I) Сумма углов тр $= 180° = 6\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$



катет, леж напр. 30° равен $\frac{AC}{2} = \frac{x+3\sqrt{2}}{2} = BC$

По т. Пифагора. $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$x^2 + \left(\frac{x+3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (x+3\sqrt{2})^2$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(x+3\sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

$BL = \sqrt{AB \cdot BC - AL \cdot LC} = \sqrt{\frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}} =$

$BC = x \cdot tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3} \Leftrightarrow AL = \sqrt{3}\,LC \Rightarrow AL = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}AC$

$AC = 2BC = \frac{2}{\sqrt{3}}x$ $\qquad LC = \frac{1}{1+\sqrt{3}}AC$

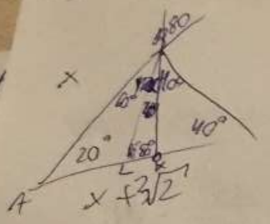
$= \sqrt{\frac{6\cdot 2}{1\sqrt{3}} - \frac{24}{\sqrt{3}\,8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}} =$

$\sqrt{\frac{24+12\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{22+12\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})}}$

см решение на стр 8

стр 4

(II) $9\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 20^\circ$



Ну в таком случае считать - грен т.к не прямоугольный тр

Проведем BK; $\angle CBK = 40^\circ$

$AC = x + 3\sqrt{2}$

$\triangle BKC^{(1)}; \triangle LBK^{(2)}; \triangle BAK$ - равнобедренный

т.к $\angle ABK = 80^\circ = \angle AKB = \angle KBC + \angle BCK = 80^\circ$

BKC - из построения равнобокий.

$\angle BAL + \angle ABL = \angle BLK = 80^\circ = \angle KB$

$AC = AK + KC = AB = x$

$AC = x + 3\sqrt{2}$, $AK = x$

$\Rightarrow KC = 3\sqrt{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$BK = 3\sqrt{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} BL = 3\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$, $\sqrt{72+6\sqrt{3}}$.

отр 5.

Председателю апелляционной
комиссии олимпиады школьников
«Покори Воробьёвы горы!»
Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика СУНЦ Специализированного
учебно-научного центра - школы-
интернат имени А.Н. Колмогорова
Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова
Богдана ~~Воротилина~~ Александровича Воротилина.

апелляция.

Прошу сообщить выставленные технические баллы за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку они отсутствуют в протоколе предварительных результатов.

Прошу продлить время на подачу апелляции по результату своей работы, поскольку считаю, что, если потребуется, не успею написать апелляцию до 11:00 (GMT+3) 31 мая.

30.05.2020