**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гайнуллин Иван Ильич**

Технический балл: **80**

Дата: **21 мая 2020 года**

# Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

*Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.*

---

**Вариант 4**

**1.** Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

**2.** Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ) ?$$

**3.** Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

**4.** Таня выбирает случайным образом целое число $a$ из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

**5.** В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква *О* и буква *Т*. Все слова начинаются на букву *О* и заканчиваются тоже на букву *О*. В любом слове буква *О* не может соседствовать с другой буквой *О*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Т*. Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

*Май 2020 г.*

№1.

$b_1 \quad b_1q \quad b_1q^2 \quad b_1q^3 \quad b_1q^4 \quad b_1q^5$

$\frac{b_1(q^3+q^2+q+1)}{4} = 10 \qquad \frac{b_1q^2(q^3+q^2+q+1)}{4} = 90$

$\boxed{b_1q^5 - ?}$

$\begin{cases} b_1(q^3+q^2+q+1) = 40 & (1) \\ b_1q^2(q^3+q^2+q+1) = 360 & (2) \end{cases}$

делим (2) на (1)

$q^2 = \frac{360}{40} = 9$

$\boxed{q = \pm 3}$

Возвращаемся к (1):

а) $b_1(27+9+3+1) = 40$

$b_1 = \frac{40}{40} = 1$

$\boxed{b_1q^5 = 3^5 = 27 \cdot 9 = 243}$

$27 \times 9 = 243$

б) $b_1(-27+9-3+1) = 40$

$b_1 = \frac{40}{-20} = -2$

$\boxed{b_1q^5 = -2 \cdot (-3^5) = 2 \cdot 243 = 486}$

$243 \times 2 = 486$

Ответ: он равен либо 243, либо 486.

№2.

$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)$ $\qquad$ $\sin(\pi x) - \sin(5x^\circ) = 0$

1) $2\sin\frac{\pi x - 5x^\circ}{2} \cdot \cos\frac{\pi x + 5x^\circ}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x - 5x^\circ}{2} = 0 \\ \cos\frac{\pi x + 5x^\circ}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{36}}{2} = 0 \\ \cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{36}}{2} = 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin\frac{\pi \cdot 35x}{72} = 0 \\ \cos\frac{\pi \cdot 37x}{72} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{35x \cdot \cancel{\pi}}{72} = \cancel{\pi} n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\cancel{\pi} \cdot 37x}{72} = \frac{\cancel{\pi}}{2} + \cancel{\pi} k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{35}{72}x = n \\ \frac{37}{72}x = \frac{1}{2} + k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{72}{35}n \\ x = \frac{72}{37}\left(\frac{1}{2} + k\right) \end{array}\right. \qquad \min\left(\left|\frac{72}{37}\left(\frac{1}{2}+k\right) - \frac{72}{35}n\right|\right) - ?$$

$$\frac{36}{37} + \frac{72}{37}k - \frac{72}{35}n =$$

$$= \frac{36}{37} + \frac{72 \cdot 35k - 72 \cdot 37n}{37 \cdot 35} =$$

$$= \frac{36}{37} + \frac{72(35k - 37n)}{37 \cdot 35} \qquad \min\left(\left|\frac{36}{37} + \frac{72(35k-37n)}{37 \cdot 35}\right|\right) - ?$$

2) $\frac{36 \cdot 35 + 72(35k - 37n)}{37 \cdot 35} = \frac{1295 + 72(35k-37n)}{37 \cdot 35}$

$\min(|35k - 37n|) = 2$ $\qquad$ $72 \cdot 18 = 1296 \Rightarrow$ а) $\qquad$ $72 \cdot 16 = 1152 \Rightarrow$ б)

$(|35k - 37n|) \underset{2}{\equiv} 1$

а) $35k - 37n = -18$

$\left|\frac{1295 - 1296}{37 \cdot 35}\right| = \frac{1}{37 \cdot 35}$

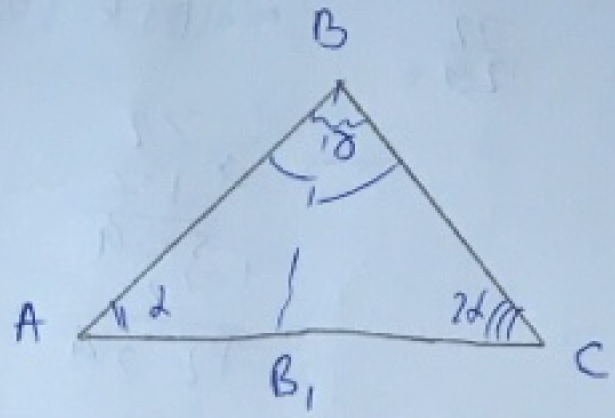
б) $35k - 37n = -16$

$\left|\frac{1295 - 1152}{37 \cdot 35}\right| = \frac{143}{37 \cdot 35}$

Ответ: $\frac{1}{37 \cdot 35}$.

№3.

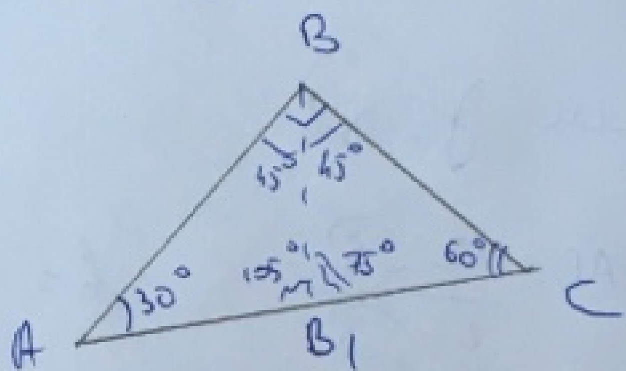
$\gamma = 3\alpha$ или $\gamma = 6\alpha$




AC – max $\qquad AC = AB + 3\sqrt{2}$

1) если $\gamma = 3\alpha \Rightarrow 6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

Теор. син. для $\Delta ABB_1$ и $\Delta B_1BC$:




$$\begin{cases} \dfrac{AB}{\sin 105^\circ} = \dfrac{BB_1}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AB_1}{\sin 45^\circ} \\ \dfrac{BB_1}{\sin 60^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 75^\circ} = \dfrac{B_1C}{\sin 45^\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{AB + 3\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = BB_1 \cdot \dfrac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ} \quad \left( = \dfrac{AB_1 + B_1C}{\sin 45^\circ} \right) \\ \dfrac{AB}{\sin 45^\circ} = \dfrac{BB_1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{2}\, BB_1} \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\, BB_1 + 3\sqrt{2}\right) = BB_1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$2BB_1 + 6 = BB_1 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \qquad 2BB_1 + 6 = BB_1 \cdot \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$$

$$BB_1 = \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} - 2\right) = 6 \qquad BB_1 = \frac{6}{\frac{2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

2) если $\gamma = 6\alpha \Rightarrow 9\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$.

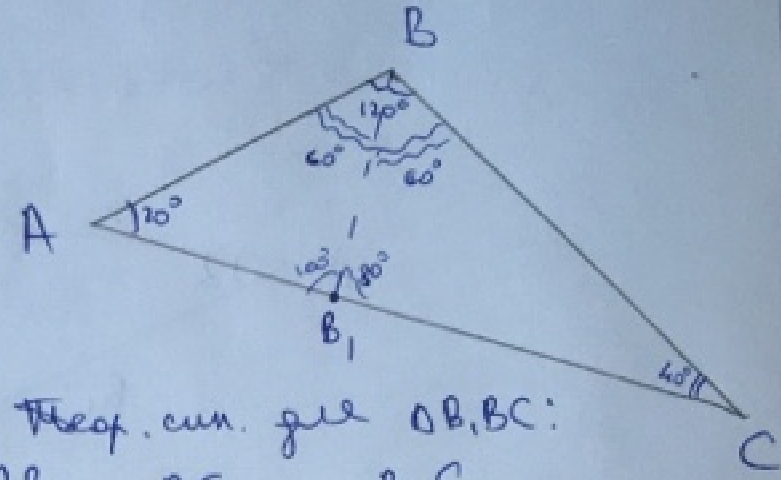
~~Теор. кос. для △ABC~~

$\cancel{AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ}$

$\cancel{(AB + 3\sqrt{2})^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC}$

$\cancel{AB^2 + 18 + 6\sqrt{2}AB = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC}$

$\cancel{BC^2 - BC \cdot AB + 6\sqrt{2}AB + 18 = 0}$




Теор. син. для $\triangle ABB_1$:

$$\frac{BB_1}{\sin 20^\circ} = \frac{AB}{\sin 100^\circ} = \frac{AB_1}{\sin 60^\circ}$$

Теор. син. для $\triangle B_1BC$:

$$\frac{BB_1}{\sin 40^\circ} = \frac{BC}{\sin 80^\circ} = \frac{B_1C}{\sin 60^\circ}$$

$$\begin{cases} BB_1 \dfrac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ} = \dfrac{AB + 3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \left( = \dfrac{AB_1 + B_1C}{\sin 60^\circ} \right) \\ BB_1 \cdot \dfrac{1}{\sin 20^\circ} = \dfrac{AB}{\sin 100^\circ} \end{cases}$$

Делим друг на друга: $\dfrac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ} \cdot \sin 20^\circ = \dfrac{AB + 3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} \cdot \dfrac{\sin 100^\circ}{AB}$

$$AB\,(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) \sin 20^\circ \cdot \sin 60^\circ = AB \cdot \sin 100^\circ \cdot \sin 20^\circ \sin 40^\circ + 3\sqrt{2} \cdot \sin 100^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$$

$$AB = \frac{3\sqrt{2}\,\sin 100^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 100^\circ}$$

$$BB_1 = AB \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$BB_1 = \frac{3\sqrt{2}\,\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 100^\circ}$$

Ответ: $BB_1 = \dfrac{3\sqrt{2}\,\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 100^\circ}$

или $BB_1 = 3\sqrt{3}$

№1.

## №4.

$a \in \mathbb{Z}$  $a \in [-6; 5]$  $3x^3 + (3a+13)x^2 + (2a+9)x - a - 1 = 0$

Будем проверять разные значения $a$, используя по ходу действия факт, что если у ур-я 3-ей степени есть целые корни, то их можно найти из делителей свободного члена. Будем также применять схему Горнера.

1) $a = -6$  $3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 = 0$  $x = 1$  $3x^2 - 2x - 5 = 0$

| | 3 | −5 | −3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | −2 | −5 | 0 |

$D = 4 + 60 = 8^2$  $x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} = \{\frac{10}{6}; -1\}$

2) $a = -5 \Rightarrow 3x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0$  $x = -1$

| | 3 | −2 | −1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | −5 | 4 | 0 |

$D = 25 - 16 \cdot 3 < 0$  $3x^2 - 5x + 4 = 0$

3) $a = -4 \Rightarrow 3x^3 + x^2 + x + 3 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | −2 | 3 | 0 |

$3x^2 - 2x + 3 = 0$  $D = 4 - 4 \cdot 9 < 0$

4) $a = -3 \Rightarrow 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | 1 | 2 | 0 |

$3x^2 + x + 2 = 0$  $D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0$

5) $a = -2 \Rightarrow 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 7 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | 4 | 1 | 0 |

$3x^2 + 4x + 1 = 0$  $D = 16 - 12 = 2^2$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \{-1; -\frac{1}{3}\}$

6) $\boxed{a = -1} \Rightarrow 3x^3 + 10x^2 + 7x = 0$  $x = 0$

$3x^2 + 10x + 7 = 0$  $D = 100 - 12 \cdot 7 = 4^2$  $x_{1,2} = \frac{-10 \pm 4}{6} = \{-\frac{14}{6}; -1\}$

7) $a = 0 \Rightarrow 3x^3 + 13x^2 + 9x - 1 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 13 | 9 | −1 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | 10 | −1 | 0 |

$3x^2 + 10x - 1 = 0$  $D = 100 + 12 = 112$

$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{112}}{6}$

8) $a = 1 \Rightarrow 3x^3 + 16x^2 + 11x - 2 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 16 | 11 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | 13 | −2 | 0 |

$3x^2 + 13x - 2 = 0$  $D = 169 + 24 = 193$

$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{193}}{6}$

9) $a = 2 \Rightarrow 3x^3 + 19x^2 + 13x - 3 = 0$  $x = -1$

| | 3 | 19 | 13 | −3 |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 3 | 16 | −3 | 0 |

$3x^2 + 16x - 3 = 0$  $D = 256 + 36 = 292$

$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{292}}{6}$

10) $a=3 \Rightarrow 3x^3+22x^2+15x-4=0$ $\quad x=-1$

| | 3 | 22 | 15 | -4 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 3 | 19 | -4 | 0 |

$3x^2+19x-4=0$

$D=361+48=409$

$x_{1,2}=\dfrac{-19\pm\sqrt{409}}{6}$

11) $a=4 \Rightarrow 3x^3+25x^2+17x-5=0$ $\quad x=-1$

| | 3 | 25 | 17 | -5 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 3 | 22 | -5 | 0 |

$3x^2+22x-5=0$

$D=484+60=544$

$x_{1,2}=\dfrac{-22\pm\sqrt{544}}{6}$

12) $a=5 \Rightarrow 3x^3+28x^2+19x-6=0$ $\quad x=-1$

| | 3 | 28 | 19 | -6 |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 3 | 25 | -6 | 0 |

$3x^2+25x-6=0$

$D=625+72=697$

$x_{1,2}=\dfrac{-25\pm\sqrt{697}}{6}$

вероятность $= k$ $\qquad k=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$

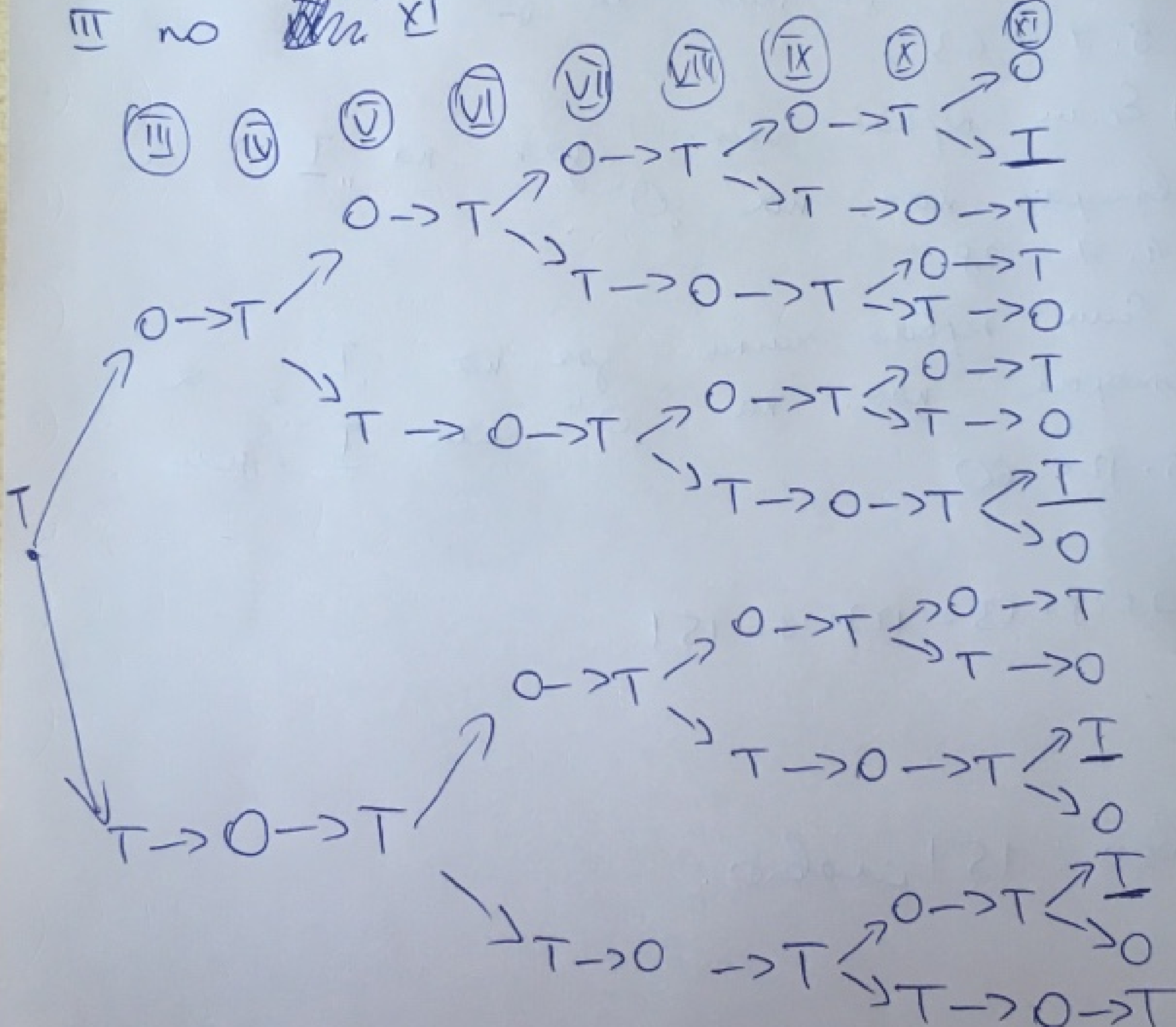
Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

№5.

Если все слова начинаются и заканчиваются на „О", значит вторая и двадцать-первая буквы – „Т".

$$OT\underbrace{\_\,\_\,\_\ \dots\ \_\,\_\,\_}_{18}TO$$

Выпишем дерево вариантов для букв с III по ~~XI~~ XI




(Подчёркнуты те „Т", которые идут после другой „Т").

Заметим, что для второй части всё будет „симметрично", т.е. мы „одновременно" рассмотрели возможные вар. букв с XII по XX. Осталось „соединить" две ~~[illegible]~~ части слова.

1) Если первая часть зак. на „О", а вторая нач. на „Т" или на „I"

9 · 7 = 63

2) Если первая часть зак на „I", а вторая нач. на „О".

4 · 7 = 28

3) Если первая часть зак. на „Т", а вторая нач. на „О" или „Т".

5 · 12 = 60

60 + 28 + 63 = 123 + 28 = 151

Ответ: 151 слово.

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников
„Покори Воробьёвы горы!"
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
ученика 11 класса „Г" МАОУ „Лицей №131",
расположенного по адресу г. Казань,
ул. Бутлерова, д. 54,
Гайнуллина Ивана Ильича

# Апелляция

Прошу пересмотреть выставленные технические баллы (80) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что моё решение задачи №3 оценено некорректно. Я предполагаю, что вами было выставлено что-то около 5 баллов. Однако, прошу заметить, что один из ответов на поставленный в задаче вопрос был получен верно, ведь

$$\frac{3\sqrt{2}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 100^\circ} = 3\sqrt{2},$$

что согласуется с официальными ответами. При получении второго ответа я где-то обсчитался, получив $3\sqrt{3}$ вместо $(9+3\sqrt{3})$, но ведь идея решения верна! Достаточно расписать теорему синусов для 2 треугольников и решить полученную систему, чтобы получить ответ на поставленный вопрос. Прошу вас принять это во внимание.

30.05.2020