МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Зорабов Георгий Михайлович**

Технический балл: **95**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 1

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 15, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 60. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^{\circ})?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 10 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Андрей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a-4)x^2 - (2a-3)x + a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Андрей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2020 всего две буквы: буква *А* и буква *Б*. Все слова начинаются на букву *А* и заканчиваются тоже на букву *А*. В любом слове буква *А* не может соседствовать с другой буквой *А*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *Б*. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА – нет. Сколько 20-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Задание 1.

Пусть $b_1, \ldots, b_6$ - члены прогрессии; q - знаменатель прогрессии, тогда: $b_2 = b_1 q$; $b_3 = b_1 q^2 \ldots$

$$\begin{cases} \frac{b_1+b_2+b_3+b_4}{4} = 15 \\ \frac{b_3+b_4+b_5+b_6}{4} = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3}{4} = 15 \mid \cdot 4 \\ \frac{b_1q^2+b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5}{4} = 60 \mid \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2+q^3) = 60 \mid : b_1 \neq 0 \\ b_1q^2(1+q+q^2+q^3) = 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+q+q^2+q^3 = \frac{60}{b_1} \quad (b_1 \neq 0) \\ \cancel{b_1}q^2 \cdot \frac{60}{\cancel{b_1}} = 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2+q^3) = 60 \\ q^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \quad 1) \\ q = -2 \end{array}\right.$$

1) $q = 2$:

$b_1(1+2+4+8) = 60$

$b_1 \cdot 15 = 60$

$b_1 = 4$, тогда

$b_6 = b_1 q^5 = 4 \cdot 2^5 = 128$

2) $q = -2$:

$b_1(1-2+4-8) = 60$

$b_1(-5) = 60$

$b_1 = -12$

$b_6 = b_1 q^5 = -12 \cdot (-2)^5 = 384$

Ответ: последний член равен либо 128, либо 384

2.

Задание 2

$$\sin(\pi x) = \sin(3x^\circ)$$

$$\sin(\pi x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{180}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{3\pi x}{180} + 2\pi k_1 \\ \pi x = \pi - \frac{3\pi x}{180} + 2\pi k_2 \end{array}\right. \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} 177x = 360k_1 \\ 183x = 180 + 360k_2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{360k_1}{177} \\ x = \frac{180+360k_2}{183} \end{array}\right.$$

Нужно минимизировать:

$$\left|180\left(\frac{2k_1}{177} - \frac{1}{183} - \frac{2k_2}{183}\right)\right| =$$

$$= \frac{180}{177\cdot183}\left|2(183k_1 - 177k_2) - 177\right| =$$

$$= |6(61k_1 - 59k_2) - 177|$$

т.к. $(61;59)=1$ $61k_1 - 59k_2$ может быть равняться любому целому

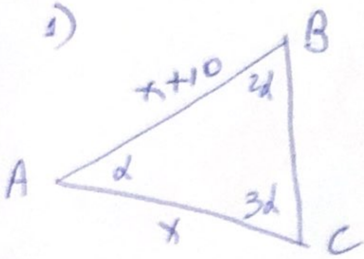
ближайшее (по модулю) кратное 6 к 177 это 174 или 180, тогда min модуля $=3$, а значит min всего выражения:

$$\boxed{\frac{180\cdot3}{177\cdot183}}$$

Задание 3

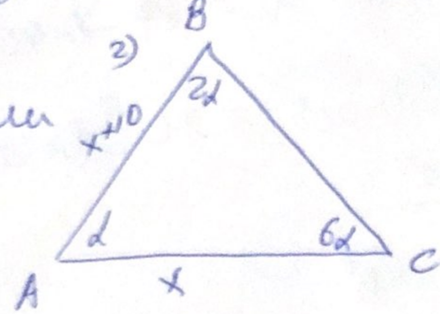
Т.к. против большей стороны лежит больший угол, возможны 2 случая:

1)

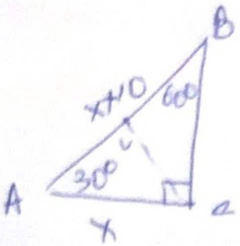


или

2)



1) $6\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 30^\circ$, тогда $\triangle ABC$ п/у



$BC = \frac{x+10}{2}$ (лежит против угла в 30°)

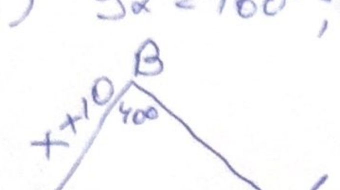
$AC = BC \cdot \sqrt{3}$ ($\alpha = 30^\circ$), отсюда

$$x = \frac{x+10}{2}\sqrt{3}; \quad x = 30 + 20\sqrt{3}$$

По формуле биссектрисы: $CL = \frac{2\,AC \cdot BC}{AC + BC} \cdot \cos 45^\circ =$

$$= \frac{2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{x + \frac{x}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{2}\,(30 + 20\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

2) $9\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 20^\circ$, тогда $\triangle ABC$:



по th. Sin:

см. далее

продолжение Задание 3

по th. Sin:

$$\frac{x+10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = (x+10)\sin 40^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\sqrt{3}x = 2(x+10)\sin 40^\circ$$

$$\sqrt{3}x - 2x\sin 40^\circ = 20\sin 40^\circ$$

$$x(\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ) = 20\sin 40^\circ$$

$$x = \frac{20\sin 40^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}$$

$$\frac{BC}{\sin 20^\circ} = \frac{x}{\sin 40^\circ}; \quad \frac{BC}{\sin 20^\circ} = \frac{20\cancel{\sin 40^\circ}}{(\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ)\cancel{\sin 40^\circ}}$$

$$BC = \frac{20 \cdot \sin 20^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}$$ по ф-ле биссектр.

$$CL = \frac{2 \cdot \frac{20 \cdot \sin 20^\circ}{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ} \cdot \frac{20\sin 40^\circ}{\cancel{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{20\sin 20^\circ + 20\sin 40^\circ}{\cancel{\sqrt{3} - 2\sin 40^\circ}}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right)(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ)} = \frac{10\sqrt{3}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^\circ\right)\cos 10^\circ}$$

Задание 4

Заметим, что $x=-1$ — корень, тогда исходное уравнение равносильно:

$$(x+1)(3x^2+x(1-3a)+2+a)=0$$

тогда $a=\frac{3x^2+x+2}{3x-1}=x+\frac{2}{3}+\frac{8}{9x-3}$

$$3a=3x+2+\frac{8}{3x-1}$$

для того, чтобы a было целым при целом x

$8 \vdots 3x-1 \Rightarrow 3x-1=\pm1; \pm2; \pm4; \pm8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0; x=\pm1; x=3$. При таких x $a=-2; 3; -1; 4$

$a=-1$: $(x+1)(3x^2+4x+1)=0$

$\cancel{(x+1)}($ $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$ не подходит

$a=-2; 3; 4$ — есть 2 целых корня:

3 варианта из 12 $\Rightarrow$ вероятность $=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$

Ответ: 0,25

Задание 5

~~Существует~~ Рассмотрим 3 „вида" слов:

1) Заканч. на А | Обозначу (кол-во) такие слова длины n:
2) Заканч. на 1 Б | a_n, b_n, c_n
3) Заканч. на ББ |

$a_1 = 1$ – удовлетворяет условиям

$b_1 = c_1 = 0$ (нач. и зак. на А, здесь не так)

Рассмотрим правила добавление букв:

$a_{n+1} = b_{n} + c_n$ – после Б можно А

$b_{n+1} = a_n$ – после А только Б

$c_{n+1} = b_n$ – после 1 Б можно Б

то есть:

$a_{n+1} = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$

тогда a_{20}:

$a_1 = 1$

$a_2 = 0 = b_1 + c_1$

$a_3 = 1 = b_2 + c_2 = 1 + 0$

$a_4 = 1$	$a_{12} = 9$
$a_5 = 1$	$a_{13} = 12$
$a_6 = 2$	$a_{14} = 16$
$a_7 = 2$	$a_{15} = 21$
$a_8 = 3$	$a_{16} = 28$
$a_9 = 4$	$a_{17} = 37$
$a_{10} = 5$	$a_{18} = 49$
$a_{11} = 7$	$a_{19} = 65$

$a_{20} = 86$

Ответ: 86 слов