



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Евдаев Леон Ифраимович**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 4

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 10, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 90. Чему может быть равен последний член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(5x^\circ)?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $3\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Таня выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 13)x^2 + (2a + 9)x - a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Таня получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОТ2020 всего две буквы: буква O и буква T . Все слова начинаются на букву O и заканчиваются тоже на букву O . В любом слове буква O не может соседствовать с другой буквой O . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы T . Например, слова ОТТО, ОТОТОТО, ОТТОТОТТО являются допустимыми, а слова ОТТОТ, ОТООТО, ОТОТТТО – нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

Пусть

№1

Вариант 4

q - знаменатель прогрессии тогда
Наша прогрессия где b_1 - первый член
такая, $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, b_1q^5$

По

условию

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3}{4} = 10 \\ \frac{b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + b_1q^5}{4} = 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b_1 (1 + q + q^2 + q^3)}{4} = 10 \\ \frac{b_1 (q^2 + q^3 + q^4 + q^5)}{4} = 90 \end{cases}$$

по формуле
сумма геом. прогр.
получим

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 \left(\frac{q^4 - 1}{q - 1} \right) = 40 \\ b_1 \left(\frac{q^2(q^4 - 1)}{q - 1} \right) = 360 \end{cases}$$

т.к. $q \neq \pm 1$ так
можно сделать

$$\Rightarrow \text{получим } q^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$

1) Пусть $q = 3 \Rightarrow b_1(1 + 3 + 9 + 27) = 40 \Rightarrow$
 $b_1 \cdot 40 = 40 \Rightarrow b_1 = 1$

Значит, последний член $b_1 q^5 = 1 \cdot 243 = 243$

2) Пусть $q = -3 \Rightarrow b_1(1 - 3 + 9 - 27) = 40 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b_1(-20) = 40 \Rightarrow b_1 = -2$
 $\Rightarrow b_1 q^5 = -2 \cdot (-3)^5 = -2 \cdot -243 = 486$

Ответ: 243 или 486

Страница 1 из 7

$$\sin(\pi x) = \sin(5x)$$

Переведем градусную величину x° в радианную

$$x^\circ = \frac{\pi x}{180}$$

$$\Rightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(5 \cdot \frac{\pi x}{180}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi x}{36}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi x}{36} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{\pi x}{36} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x}{36} + 2k \\ x = 1 - \frac{x}{36} + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{36x - x}{36} = 2k \\ \frac{36x + x}{36} = 1 + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35x}{36} = 2k \\ \frac{37x}{36} = 1 + 2n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{72k}{35} \\ x = \frac{36(1+2n)}{37} \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{72k}{35} \\ x = \frac{36}{37} + \frac{72n}{37} \end{cases} \Rightarrow \text{расстояние между}$$

корнями = $\left| \frac{72k}{35} - \frac{36}{37} - \frac{72n}{37} \right|$ - модуль, т.к. расстояние > 0
берем абсолютн

$$\Leftrightarrow \left| \frac{72k \cdot 36 - 72n \cdot 35 - 36 \cdot 37}{35 \cdot 36} \right| = \left| \frac{72(36k - 35n) - 36 \cdot 37}{35 \cdot 36} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{72(37k - 35n) - 36 \cdot 35}{35 \cdot 37} \right| =$$

$$= \left| \frac{72(37k - 35n) - 36 \cdot 35}{35 \cdot 37} \right|_{\mathbb{Z}} = \left| \frac{72(37k - 35n)}{35 \cdot 37} \right|$$

$$= \left\lfloor \frac{72 \cdot ((37k - 35n) - 17.5)}{35 \cdot 37} \right\rfloor, \text{ т.к. нам нужен}$$

минимум, то заметим, что

$$37k - 35n - \text{целое число} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min \left\lfloor \frac{(37k - 35n) - 17.5}{35 \cdot 37} \right\rfloor \text{ будет}$$

достигаться при $37k - 35n = 17$

$\Rightarrow$ то уравнение имеет решение при

$$\text{целых } k \text{ и } n \text{ (т.к. } \text{НОД}(37, 35) = 1)$$

$$\text{при } k = 26, n = 27$$

$$37 \cdot 26 - 35 \cdot 27 = 17 \text{ - верно}$$

$$\Rightarrow \min 37k - 35n = 17 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ разность минимальная равна

$$\left\lfloor \frac{72 \cdot (1 - \frac{1}{2})}{35 \cdot 37} \right\rfloor = \frac{36}{35 \cdot 37} = \frac{36}{1295}$$

$$\text{Ответ: } \frac{36}{1295}$$

Заметим, что если убрать последнюю букву, то любое слово можно разбить на слоги "ОТ" и "ОТТ" единственным способом.

Более того любое слово из 21 буквы, составленной из таких слов подходит, если приписать букву "О" в конец.

Составим таблицу где n_1 - кол-во слов "ОТ" n_2 - кол-во слов "ОТТ"

(на след. странице)

Страница 3 из 7

6020 букв
 $2n_1 + 3n_2 = 21$

"OT"	"OT"	количество слов
n_1	n_2	$C_{n_1+n_2}^{n_1}$
0	7	$C_7^0 = 1$
3	5	$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
6	3	$C_9^6 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$
9	1	$C_{10}^1 = 10$

Т.к. групп натуральных решений ур-ия
 $2n_1 + 3n_2 = 21$ — нет, то мы учли

все слова $1 + 56 + 84 + 10 = 151$

Ответ: 151

Справился 4 из 7

$$3x^3 + (3a+13)x^2 + (7a+9)x - a - 1 = 0$$

Заметим, что $x = -1$ - всегда решение, т.к.

$$-3 + 3a + 13 - 7a - 9 - a - 1 = 0$$

Вынесем за скобку $(x+1)$

$$(x+1)(3x^2 + (3a+10)x - (a+1)) = 0$$

$\Rightarrow$ решения $x_1, x_2 =$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2A} \\ x_2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} \end{cases}, \text{ где } A=3, B=3a+10,$$

$$D = (3a+10)^2 - 4 \cdot 3(a+1) = 9a^2 + 72a + 112$$

т.к. хотя бы 2 целых решения, то или x_1 или x_2 - целое

$\Rightarrow$ D - квадрат целого числа

Рассмотрим все D при $a \in [-6; 5]$

a	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D	4	123	32	23	4	49	193	252	409	514	697	
	✓				✓	✓	112					

$\Rightarrow$ в итоге подходящие значения $a = \{-6, -2, -1\}$

Найдем все корни для каждого из этих a

1) $a = -6$: $A=3, B=2, D=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2+2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{2-2}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -6 \text{ подходит}$$

2) $a = -2$: $A=3, B=4, D=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4+2}{6} = -\frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-4-2}{6} = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ не подходит}$$

т.к. -1 уже решение

Страница 5 из 7

$$3) a = -1; A = 3, B = +7, D = 49$$

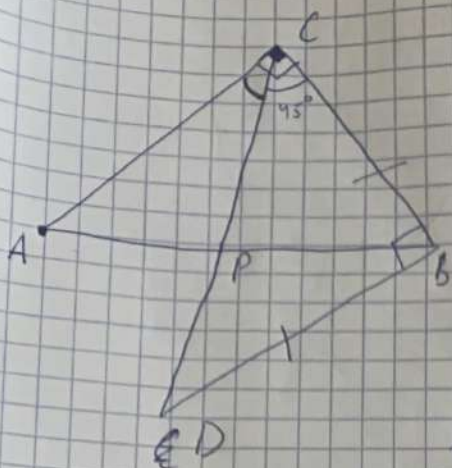
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7+7}{6} = 0 \\ x_2 = \frac{-7-7}{6} = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow a = -1 - \text{подходит}$$

В итоге мы получили, что подходит только $a = -6$ и $a = -1$. Из 12 возможностей только 2 $\Rightarrow$ вероят-ть того что Таня

получит три различных числа из которых 2-х меньше равно $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

Страница 6 из 7



$\sqrt{3}$ См. задачу 7
 Рассмотри, первая часть
 когда $\angle A = d$, $\angle B = 2d$, $\angle C = 3d \Rightarrow$
 $d + 2d + 3d = 180^\circ \Rightarrow 6d = 180^\circ$
 $d = 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$

Обозначим CP-биссектриса.
 Проведем, через B $BD \parallel AC$
 Отложим $\angle CBD = 90^\circ$, тогда

$AC \parallel BD \Rightarrow \triangle APC \sim \triangle BPD$
 $\Rightarrow \frac{BP}{CP} = \frac{CP}{PD} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{AC+BC}$, т.к.

$BC = BD$ ($\triangle ABC \sim \triangle BCD$ - по углам)

Имеем $CP = \frac{AC \cdot CD}{AC+BC} = \frac{\sqrt{3} BC^2}{(\sqrt{3}+1)BC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} BC$

Из $AB = AC + 3\sqrt{2}$ ~~$BC = \sqrt{3} AC$~~

$2BC = \sqrt{3} BC + 3\sqrt{2} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow CP =$

$= \frac{3\sqrt{12}}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2} \text{ углов} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = 9+3\sqrt{3}$

$\angle A = d$, $\angle B = 2d$, $\angle C = 6d \Rightarrow$

$9d = 180 \Rightarrow d = 20^\circ$

$\Rightarrow \angle C = 120^\circ$

CP-бисс.

Отложим $\angle BCX = 20^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CPX = \angle CXP = 20^\circ \Rightarrow PC = CX$

$\Rightarrow \angle XCB = \angle XBC = 40^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CX = XP$ (т.к. $\angle XCP = 20^\circ$)

$AB = AC + 3\sqrt{2}$, но $\angle AXC = \angle AXC = 30^\circ$

Ответ: $9+3\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC = AX = XB = 3\sqrt{2} \Rightarrow CP = 3\sqrt{2}$, т.к. $(CP = XB)$

См. задачу

Евдаев Леон Ифраимович, Лицей вторая школа -
11класс

Здравствуйте, не нашел своего ФИО в списке с техническими баллами. Также не вижу своих результатов в личном кабинете, а могу только подать апелляцию.

Работу посылал единым pdf файлом в установленное время (вторым в виртуальной аудитории).

Прошу, пожалуйста, как можно скорее сообщить мои результаты, т к времени на апелляцию все меньше