



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Уразов Тимур Александрович**

Технический балл: **90**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 2

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 20, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 180. Чему может быть равен пятый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(x^\circ) ?$$

3. Один из углов треугольника в 2 раза меньше другого, а наибольшая сторона треугольника на $2\sqrt{2}$ больше второй по величине стороны. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Маша выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-5; 6]$ и после этого решает уравнение $3x^3 - (3a - 13)x^2 - (2a - 9)x + a - 1 = 0$.

Найдите вероятность того, что Маша получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях она не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты ОГ2020 всего две буквы: буква O и буква G . Все слова начинаются на букву O и заканчиваются тоже на букву O . В любом слове буква O не может соседствовать с другой буквой O . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы G . Например, слова ОГГО, ОГОГОГО, ОГГОГОГГО являются допустимыми, а слова ОГГОГ, ОГООГО, ОГОГГГО – нет. Сколько 19-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

2 БАРУАНТ.

① $\forall (a_n) : n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 (но дет
cp. арифметик)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \cdot 20 - 80 & (1) \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 4 \cdot 180 = 720 & (2) \end{cases}$$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, где q - знакоизменяе

Tогда $(1) \Leftrightarrow a_1(1+q+q^2+q^3) = 80$

$(2) \Leftrightarrow a_1q^2(1+q+q^2+q^3) = 720$

$a_1(1+q+q^2+q^3) = 80 \wedge a_1q^2(1+q+q^2+q^3) = 720 \Rightarrow q^2 = 3 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Если $q = 3$; т.к.

$(1) \Leftrightarrow a_1(1+3+3^2+3^3) = 80 \Leftrightarrow$
 "40

$\Leftrightarrow a_1 = 2$

Tогда $a_5 = a_1q^4 = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$

Если $q = -3$; т.к.

$(1) \Leftrightarrow a_1(1-3+3^2-3^3) = 80$
 " -20

$\Leftrightarrow a_1 = -4$

Tогда $a_5 = a_1q^4 = (-3)^4 \cdot (-4) = -324$

Конечносъобразная проверка не требуется.
 Задача решена.
 Ответ: 162; -324.

④ Задание, что

$$3x^3 - (3a-13)x^2 - (2a-3)x + a-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2 - (3a-10)x + a-1) = 0$$

\Rightarrow нервное корень
уравнение из вектора, он
равен -1 : $x = -1 \in \mathbb{Z}$

Остается исключить из уравнения корень: $3x^2 - (3a-10)x + a-1 = 0$

$$D = (3a-10)^2 - 12(a-1) =$$

$$= 3a^2 - 72a + 112 = 3a^2 - 72a +$$
$$+ 144 - 32 = 3(a-4)^2 - 32.$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{6}(3a-10) \pm \sqrt{3 \cdot (a-4)^2 - 32}$$

Чтобы,

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{6}(3a-10 + \sqrt{3(a-4)^2 - 32}) \\ x_3 = \frac{1}{6}(3a-10 - \sqrt{3(a-4)^2 - 32}) \end{cases}$$

- корни исходного ур-я

+ 2 -

Заметим, что $x_2 \neq x_3$,
так как $a \neq 4$, т.е. $3(a-4)^2 - 32 \neq 0$ (так как $a \neq 4$).

Тогда умножим на a ,
тогда получим $x_2 \cdot x_3 \in \mathbb{Z}$
такое, что $x_2 \cdot x_3 = 3(a-4)^2 - 32$.

- $a = -5 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 729 - 32 = 697 = 17 \cdot 41 \Rightarrow \sqrt{697} \notin \mathbb{Z}$
чтобы не возникли
- $a = -4 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 3 \cdot 64 - 32 = 544 = 17 \cdot 32 \Rightarrow \sqrt{544} \in \mathbb{Z} \quad -$
- не возникли
- $a = -3 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 3 \cdot 49 - 32 = 408 \quad -$ упростите, чтобы
 $\sqrt{408} \notin \mathbb{Z} \quad -$ не возникли
- $a = -2 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 3 \cdot 36 - 32 = 288 = 4 \cdot 73 \Rightarrow \sqrt{288} \notin \mathbb{Z} \quad -$
- не возникли

~~u~~ ~~a~~ ~~4 uposgi~~ $\Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 3 \cdot 25 -$
 $- 32 = 183 - \text{uposgi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{183} \notin \mathbb{Z}$ - the negativen

$a=0 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 144 - 32 =$
 $= 112 = 16 \cdot 7 \Rightarrow \sqrt{112} \notin \mathbb{Z}$ -
 - the negativen

$a=1 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 81 - 32 =$
 $= 49 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{6}(-7+7) = 0 \\ x_3 = \frac{1}{6}(-7-7) = -\frac{7}{3} \end{cases}$ -
 - negativen!

$a=2 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 36 - 32 = 4$ 8+

 $\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{6}(-4+2) = -\frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{1}{6}(-4-2) = -1 \end{cases}$ -
 - the negativen.

• True at $\{3; 5\}$: $3(a-4)^2 - 32 \leq 3 \cdot 1 - 32 < 0 \Rightarrow$ negativen

gr-e unenem Tonesko ejek
negativ: $x_1 = -1$

• $a=6 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 36 - 32 =$

$$a^2 = 9 \Rightarrow 3(a-4)^2 - 32 = 3 \cdot 25 -$$

$$- 32 = 193 - \text{ausrechnen} \Rightarrow$$

$$= 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{6}(8+2) = \frac{5}{3} \\ x_3 = \frac{1}{6}(8-2) = 1 \end{array} \right.$$

- negativer!

Minimales aus 12 Bereich
nicht negativer 2:

$$a = 1 \text{ u } a = 6. \text{ Cred.}$$

$$\text{Berechnung des Winkels } \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Antwort: } \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{2} \quad \sin(\pi x) = \sin(x^\circ) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(\pi x) - \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{ \text{Triv. Sinusdifferenz} =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{178\pi x}{360}\right) \cos\left(\frac{181\pi x}{360}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{178\pi x}{360}\right) = 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{181\pi x}{360}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{178\pi x}{360} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[\frac{181\pi x}{360} = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi(2k+1)}{2}, k \in \mathbb{Z} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{360k}{178}, k \in \mathbb{Z} : \text{неч. сеп.} \\ x = \frac{180(2k+1)}{181}, k \in \mathbb{Z} : \text{неч.} \end{cases}$$

• Радиус синуса неприм.

- Разность неприм. из неприм. синуса:

$$|360k - 360m| = \frac{360}{178}(k-m) > \frac{360}{178}$$

• Разность неприм. из синус. сеп.

- Разность неприм. из синус. сеп. из кратн., не кратн., кратн.

$$= \frac{180}{181} |2k+1 - 2m-1| \stackrel{\text{п.}}{=} \frac{360}{181} |k-m| > \frac{360}{181}$$

• Разность неприм. из первои синуса и второи синуса

из кратн., не кратн. и кратн.

$$| \frac{360k}{178} - \frac{360m}{178} | = 180 \left| \frac{2k}{178} - \frac{2m}{181} \right|$$

$$= \frac{180}{178 \cdot 181} |362k - 358m - 178|$$

Очевидно, что $k = m + l \in \mathbb{Z}$,

где некоторое $l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |362k - 358m - 178| = 1362l -$$

$-178 + 4m \geq 1$. Т.к. нечет,

тогда g_0 имеет единиче. разб.

или $l=2, m=-136$, т.к. же

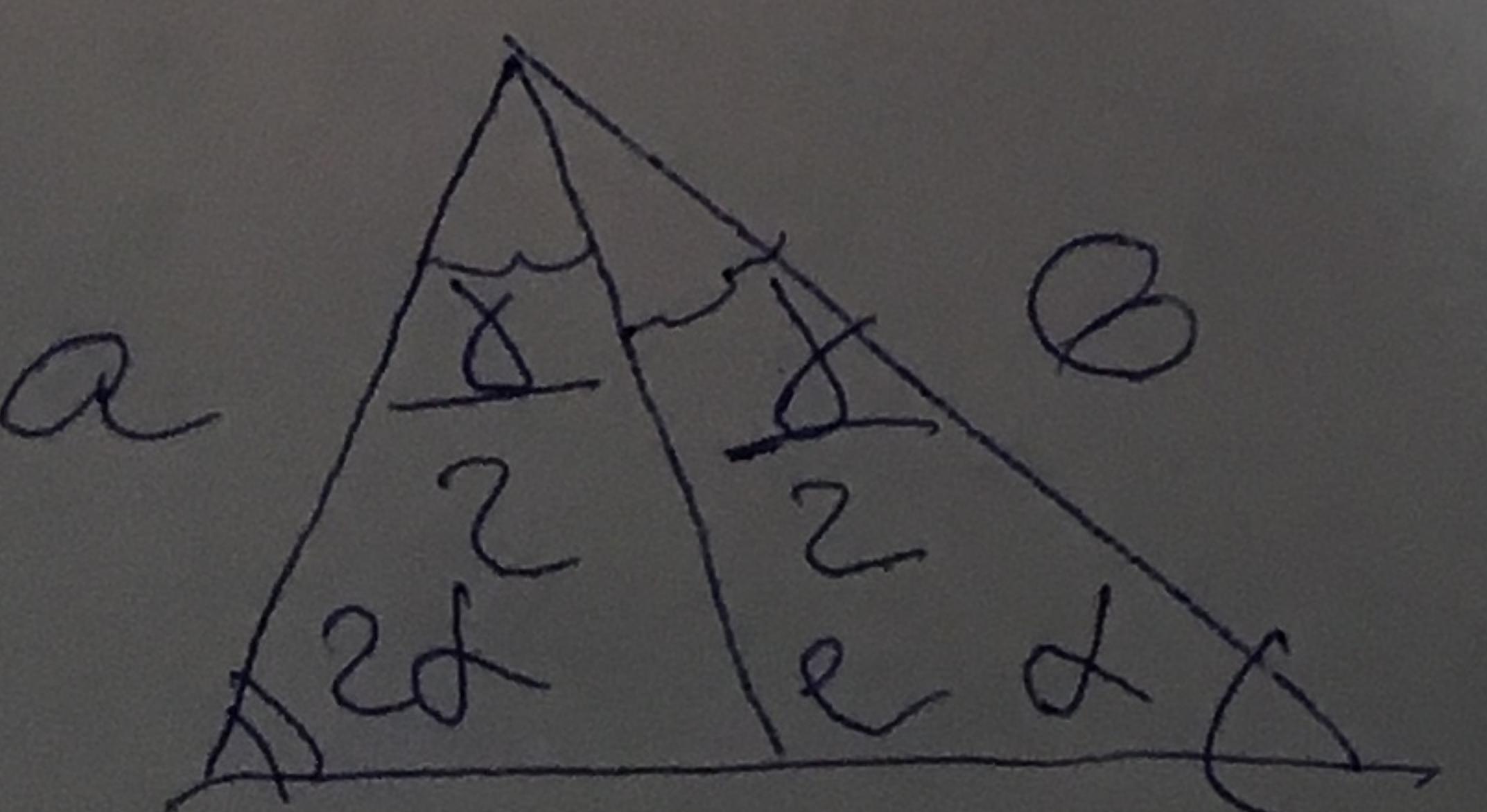
$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \tau &= \frac{360k}{178}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{nepr. } \Rightarrow -2 - 2\pi - 2\alpha \\
 362k - 178 + 4m_8 &= 724 - 178 - 544 \\
 = 724 - 723 &\Rightarrow \left| \frac{360k}{178} - \frac{180(2m+1)}{181} \right| \\
 &= \frac{180}{178 \cdot 181} |362k - 358m - 178| > \\
 &> \frac{180}{178 \cdot 181} \\
 \text{ткенчег } \frac{360}{178} &> \frac{360}{181} > \\
 > \frac{180}{178 \cdot 181}, \quad \text{наименшее} \\
 \text{расстояние между опорами} \\
 \text{равно } \frac{180}{178 \cdot 181} \quad (\text{минимальное})
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{360 \cdot 138}{178} \quad \text{и} \quad x_2 = 180 \cdot$$

$$\frac{(16 \cdot 2 + 1)}{181}$$

Однако: $\frac{180}{178 \cdot 181}$

③



1) congruence: $\gamma = 6\alpha$,
 $c = b + 2\sqrt{2}$

2) congruence:

$(b - 8 \sin \alpha \cos \alpha) \gamma = 3\alpha$, $c = b + 2\sqrt{2}$

$$\{ x = 180/11 \dots$$

+ cnez ravi: $3d = 180^\circ \Rightarrow d = 20^\circ$
 $\Rightarrow 6d = 120^\circ$ fto t. cnycol

$$\frac{c}{\sin 6d} = \frac{b}{\sin 2d} \Rightarrow c = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ} b =$$

$$= b + 2\sqrt{2} \Rightarrow b \left(\frac{\sin 120^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} \right) =$$

$$= b \frac{2\sin 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 40^\circ} = 2b \cos 80^\circ = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ}$$

fto t. cnycol, $\frac{a}{\sin d} = \frac{b}{\sin 2d}$

$$\Rightarrow a = \frac{\sin d}{\sin 40^\circ} \cdot b = \frac{\sin d}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} bc \sin \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin \frac{\gamma}{2} = ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b} = \frac{2ab \cos 30^\circ}{a+b} =$$

$$= \frac{2ab \cos 60^\circ}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$$

$$ab = \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos 80^\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 20^\circ}{\cos 80^\circ \sin 40^\circ} \Rightarrow$$

$x = \frac{180(2k+1)}{2}, \text{ letz } -370 - \frac{2}{2} - 420^+$
 3 wosigneen.

$\Rightarrow ab = l = \frac{2 \sin 60^\circ \cos 80^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\cos 80^\circ \sin 40^\circ \sqrt{2} \sin 30^\circ \cos 10^\circ}$
 $= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ \sqrt{2} \sin 30^\circ \cos 10^\circ} =$
 $= \frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{2} \cos 80^\circ \sin 80^\circ \sin 30^\circ} =$
 $= \frac{\sin 20^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 160^\circ \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} =$
 $= 2\sqrt{2}$

2 congruerei: $6d = 180^\circ \Rightarrow d = 30^\circ \Rightarrow 3d = 90^\circ - \text{w/y Th-k} \Rightarrow$
 $\Rightarrow e = \frac{1}{2}c \quad (c - \text{reuet.})$
 $\left\{ \begin{array}{l} c = B + 2\sqrt{2} \\ c = \frac{B}{\cos 30^\circ} \end{array} \right. \Rightarrow B \left(\frac{1}{\cos 30^\circ} - 2 \right) =$
 $= B \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \right) = B \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow B = \frac{2\sqrt{6}}{2 - \sqrt{3}}, \quad C = \frac{2}{\sqrt{3}}B = \frac{4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \Rightarrow$

$$x = 180(2k+)$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$$

Ontoem: $2\sqrt{2}$ unne $\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$

③ I au - kon - Bo nob us
u Syub.

Dre u-Syub. cada

Ha I u u eeecte orgeloe

O

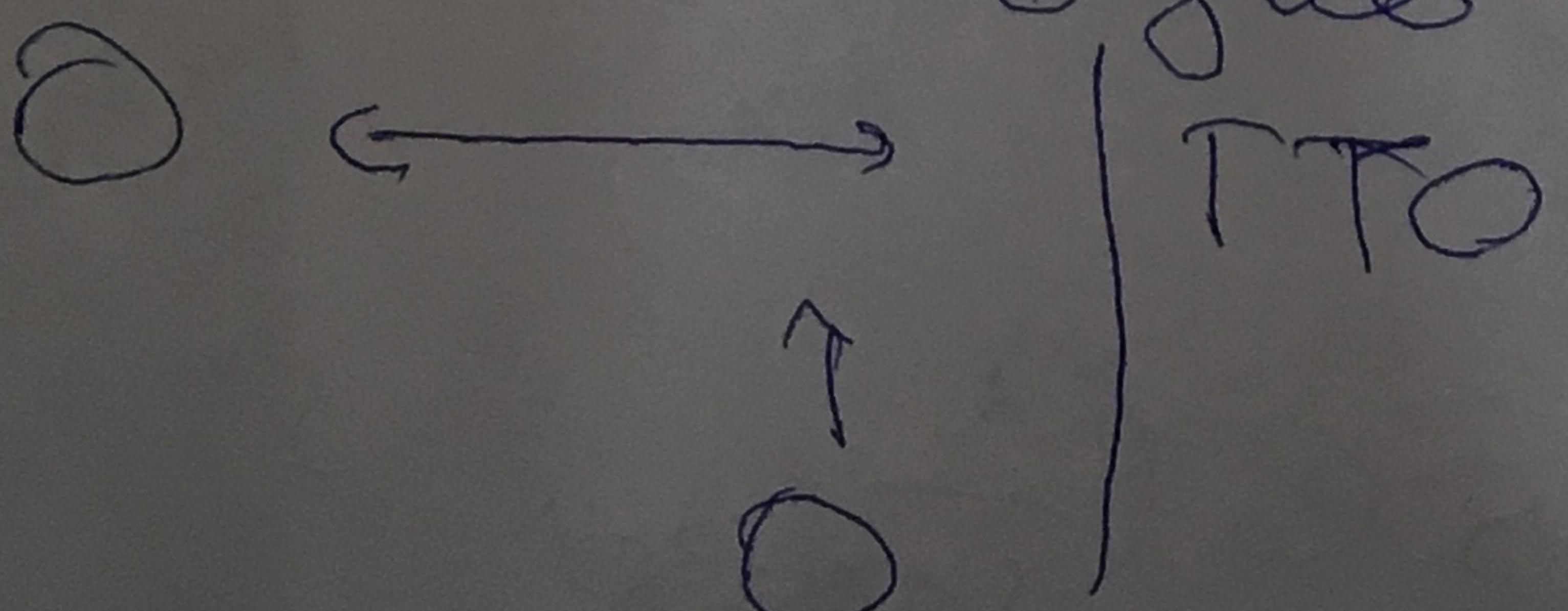
Ha u-1 u u-2 ueete

endo 2δ. Γ, endo Out.

Eene cruet 2Syubor Γ

crabo (u-3)

Syub



taiga re

u-3

eeecte

andet O (no

upabuny)

Ha taiga Tceewex nob

u-3

Einer geht auf:

End. $a_3(n-2)$ Synb

$$10 \leftrightarrow 0 \mid 10$$

Tauex end a_{n-2}

Strong. penyp. coTHOM.

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$$

$$\begin{array}{l} 0\text{TO} \Rightarrow a_2 = 1 \\ 0\text{FTO} \Rightarrow a_0 = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_3 = 1 \end{array} \right.$$

Mer. pen. coTH. ucr.

a_{13} - ucelme

a_5	1
a_6	2
a_7	2
a_8	3
a_9	4
a_{10}	5

a_{11}	+
a_{12}	3
a_{13}	12
a_{14}	16
a_{15}	21
a_{16}	a_{28}

a_{17}	37
a_{18}	48
a_{19}	65