



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Васянин Олег Александрович**

Технический балл: **85**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^\circ)?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a + 4)x^2 + (2a + 3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква A и буква B . Все слова начинаются на букву A и заканчиваются тоже на букву A . В любом слове буква A не может соседствовать с другой буквой A . Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы B . Например, слова АВВА, АВАВАВА, АВВАВАВВА являются допустимыми, а слова АВВАВ, АВААВА, АВАВВВА – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

задача 1

① $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5$ - члены арифметической,

но убывающая, $a(1+q+q^2+q^3) = 4 \cdot 30 = 120$ (1) $a \neq 0, q \neq 0$

$a \cdot q^4(1+q+q^2+q^3) = 4 \cdot 120 = 480$ (2)

поделив (2) на (1), получим

$$q^4 = 4 \Rightarrow$$

\Rightarrow 1) $q = 2$, и $a \cdot \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15a = 120, \Rightarrow a = \frac{120}{15} = 8, 4$

$$a_4 = aq^3 = 8 \cdot 8 = 64$$

2) $q = -2$, и $a \cdot \frac{(-2)^4 - 1}{-2 - 1} = -5a = 120, \Rightarrow a = -\frac{120}{5} = -24, 4$

$$a_4 = aq^3 =$$

$$= -24 \cdot (-8) = 192$$

Ответ: 64 или 192.

② $\sin(11x) = \sin(2x)$

$$\sin(180x) = \sin(2x)$$

$$0 = \sin(180x) - \sin(2x) = 2 \cos 91x \cdot \sin 89x$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 89x = 0 \Rightarrow x = \frac{180}{89}n, n \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \cos 91x = 0 \Rightarrow x = \frac{90}{91} + \frac{180}{91}n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{array} \right.$$

В сериях (1) и (2) минимальные разности между

членами: $p_1 = \frac{180}{89}, p_2 = \frac{180}{91}$. Разность между

~~В~~ членами разных серий

$$p = \left| \frac{180n}{89} - \frac{90}{91} - \frac{180}{91}m \right| \rightarrow m, n, \text{ то есть}$$

~~90~~ ~~91~~ мин 2

$$\left| \frac{90}{91} + \frac{180}{91}n - \frac{180}{89}m \right| \rightarrow \text{min} \quad | \cdot 91 \cdot 89$$

$$\left| 90 \cdot 89 + 180(89n - 91m) \right| \rightarrow \text{min} \quad | : 180$$

$$\left| \frac{90 \cdot 89}{180} + 89n - 91m \right| \rightarrow \text{min} \quad \downarrow$$

$$\left| \frac{89}{2} + (89n - 91m) \right| \rightarrow \text{min}$$

еще мин!

Для любого числа $\alpha: \left| \frac{89}{2} + \alpha \right| \geq \frac{1}{2}$ - очевидно

от $\frac{89}{2}$ до любого числа мин не меньше $\frac{1}{2}$.

Значит, $f \geq \frac{180}{91 \cdot 89} \cdot \frac{1}{2} = \frac{90}{51 \cdot 89} = \frac{90}{90^2 - 1} = f_{\text{min}}$

И при $m=n=22$ достигается значение $f = f_{\text{min}}$.

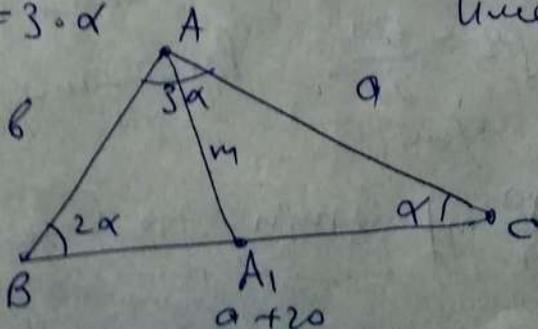
$$\text{и } f_{\text{min}} = \frac{90}{90^2 - 1} < \frac{180}{91}, \frac{180}{89}$$

Ответ: $f_{\text{min}} = \frac{90}{90^2 - 1}$

③ $b < a$ - миним. стороны Δ

$\beta, \alpha, 2\alpha$ - углы Δ

1) $\beta = 3 \cdot \alpha$



Углы $3\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$ и $\angle A$ - тупой

$a = (a+20) \sin 60^\circ = \frac{(a+20)\sqrt{3}}{2}$

$2a - 20\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$, и

(unit 3)

N(3) - угловое

→ известна $a = \frac{20\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$, и $\triangle ABA_1$ и $\triangle ACA_1$

Треугольник

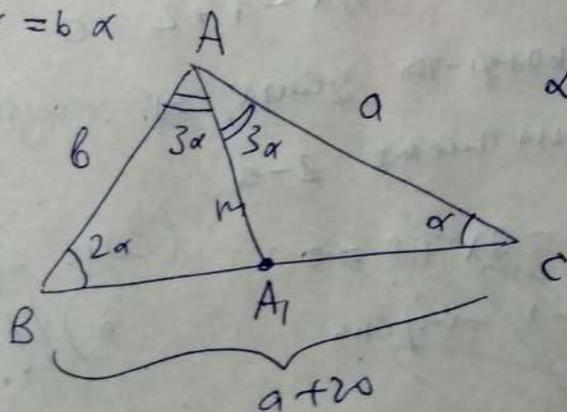
$$\frac{m}{\sin 2\alpha} = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha + \frac{3\alpha}{2})} \quad \text{unit}$$

$$m = a \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 45^\circ)} = \frac{20\sqrt{3} \cdot (2+\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= 10\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = 20\sqrt{6} \cdot \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2} = 10\sqrt{6} \cdot (1+\sqrt{3}) =$$

$$= 10\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$$

$$2) \beta = 3 \cdot 2\alpha = 6\alpha$$



$$\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$\triangle ABC$, треугольник: $\frac{a+20}{\sin 6\alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha}$

$$1 + \frac{20}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{20}{a} = \frac{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} \quad \text{в } \triangle AA_1C, \text{ т. треугольн.}$$

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 4\alpha} \Rightarrow m = \frac{a}{\sin 80^\circ} \cdot \sin 20^\circ =$$

$$= \frac{20 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{10 \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cdot (\sin 60^\circ - \sin 40^\circ)} =$$

(уст 4)

N(3) - updomeenie

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= \frac{10 \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ (\sin 60^\circ - \sin 40^\circ)} = \frac{10 \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ \cdot 2 \cos 50^\circ \sin 10^\circ} = \\ &= \frac{20 \cos 10^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot 2} = \frac{10 \cos 10^\circ \cdot 2}{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ} = \frac{20 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 20. \end{aligned}$$

Ответ: Durchmesser равна 20 мм

Диаметр равна $10\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$.

9) $a \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$$

Заметим, что все коэф-ты имеют \Rightarrow имеют общий делитель $2-a$.

~~$$a = -6 \quad 3x^3 + 14x^2 - 9x + 8 = 0$$~~

~~$$x = -1 \text{ - корень}$$~~

(см. сразу уст 6)!!!

~~$$a = -5 \quad 3x^3 - 11x^2 - 7x + 7 = 0$$~~

~~$$x = -1 \text{ - корень}$$~~

~~$$a = -4 \quad 3x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$$~~

~~$$x = -1 \text{ - корень}$$~~

~~$$a = -3 \quad 3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 = 0$$~~

~~$$x = -1 \text{ - корень}$$~~

(мет 5)

a = -2 $3x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0$

$x = -1$ - корень

группы корней к. нет

a = -1 ~~$3x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0$~~ $3x^3 + x^2 + x + 3 = 0$

~~$3x^2(x+1) + x^2(x+3) + 1(x+3) = 0$~~

$3(x^3+1) + x(x+1) = 3(x+1)(x^2-x+1) + x(x+1) =$

$= (x+1) \cdot [3x^2 - 2x + 3]$

$x = -1$ - ед. корень

a = 0 $3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$

$x = -1$ - корень

группы корней к. нет

a = 1 $3x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$

$x = -1$ - корень

группы корней нет
привести

a = 2 $3x^3 + 10x^2 + 7x = 0$

$x = 0$ - корень

$x = -1$ - корень

$x = -\frac{7}{3}$ - корень

a = 3 $3x^3 + 12x^2 + 9x - 1 = 0$

$x = -1$ - корень

группы корней нет

a = 4 $3x^3 + 16x^2 + 11x - 2 = 0$

$x = -1$ - корень

группы корней к. нет

учеб

$$\begin{array}{r} 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 \quad | \quad x+1 \\ -3x^3 + 3x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3a+1)x^2 + (2a+3)x - a + 2 \\ - (3a+1)x^2 + (3a+1)x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-a+2)x - a + 2 \\ - (-a+2)x - a + 2 \\ \hline \end{array}$$

0

Имеет разложение на множители меньшей степени:

$$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 =$$

$$= (x+1) \cdot (3x^2 + (3a+1)x - a + 2)$$

$$\text{Дискриминант } \Delta = (3a+1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a+2) =$$

$$= 9a^2 + 6a + 1 - 24 + 12a =$$

$$= 9a^2 + 18a - 23 = N^2, N \in \mathbb{Z}$$

$$9a^2 + 18a - 23 = N^2$$

$$(3a+3)^2 - 32 = N^2$$

$$(3a+3-N)(3a+3+N) = 2^5$$

$$\begin{cases} 3a+3-N = 2^x \\ 3a+3+N = 2^{5-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2^x + 2^{5-x}}{6} - 1 \in \mathbb{Z}, 4$$

$$x \in \{0, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x=1, a=2}; \underline{x=2, a=1} \text{ или } \underline{x=3, a=1}, \underline{x=4, a=2}.$$

(имеет 7)

N 4) - проверка

проверим $a = 1 : 3x^3 + 7x^2 + 5x + 4 =$

Здесь $x = -1$ - корень кратности 2! $= (x+1) \cdot (3x^2 + 4x + 4)$
 $\frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1, x = \frac{-2 \pm 1}{3}$

$a = 2 : 3x^3 + 10x^2 + 7x = x \cdot (3x^2 + 10x + 7) =$

$= x \cdot (3) \cdot (x+1) \cdot (x + \frac{7}{3})$

$= x(x+1)(3x+7)$

Итак,

подходит только значение

$a = 2$ из букв $5 - (-6) + 1 = 12, \Rightarrow$

подходит

\Rightarrow вернемся к вопросу 3 разницы шрифта $\frac{1}{12}$

Order : $p = \frac{1}{12}$

5) Рассмотрим слово (уравновешенное!) из n букв.

Оно имеет n равнозначных элементов:

слово 1) ABA
уравновешенное слово из $(n-2)$ букв

слово $k(n)$ - число уравновешенных

слово 2) ABBA
уравновешенное слово из $(n-3)$ букв

слово из n букв, тогда

$k(n) = k(n-2) + k(n-3)$

соотношение верно $n \geq 5$

n	≤ 3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$k(n)$	0	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	

Order : 114 слов.

Председателю апелляционной
комиссии Олимпиады
школьников "Покори Воробьевы
горы!"

Ректору МГУ имени М.В. Ло-
моносова академику

В.А. Садовничему ученика
11 класса Средней общеоб-
разовательной школы №146

г. Перми Пермского края
Олега Александровича Вася-
нина

апелляцией.

Прошу сообщить мои технические
баллы за мою работу заключительного
этапа по математике.

30.05.2020

Васенин О.А.
fut