МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Урусова Эвелина Викторовна**

Технический балл: **85**

Дата: **17 мая 2020 года**

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10 классов

Вариант 4–2

1. В возрастающей арифметической прогрессии $\{b_i\}$ дано $b_1 = 1$, $b_{b_2} = 17$. Найдите b_n с номером $n = b_{b_3}$.

2. Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен 5. Высота, проведённая к гипотенузе, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 9. Найдите длину второго отрезка.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\sin\left(x^2 - 2,58\right) = \cos(\pi x).$$

4. Сумма длин двух ребер прямоугольного параллелепипеда равна 2020, а произведение равно длине третьего ребра. Найдите длину третьего ребра, если известно, что она на 1 меньше длины диагонали этого параллелепипеда.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + a|x - a| = 10x - 24$$

имеет решение. Для каждого из найденных a укажите число решений.

май 2020 г.

① $\{b_i\}$ $b_1 = 1$ $b_{b_2} = 17$ $b_{b_{b_3}}$ - ?

$b_2 = 1 + d$

$b_{d+1} = 17 = b_1 + d(d+1-1) = 1 + d^2$

$1 + d^2 = 17$
$d = \pm 4$

$b_i \uparrow \Rightarrow d = 4$ (второй корень (-4) не подходит)

$b_3 = 1 + 2d = 1 + 2 \cdot 4 = 9$

$b_{b_3} = b_9 = 1 + 8d = 1 + 8 \cdot 4 = 33$

$b_{b_{b_3}} = b_{33} = 1 + 4 \cdot 32 = 129$

Решение

№2

Пусть $HC = a$, тогда

$9 \cdot a = AH^2$

$AH = 3\sqrt{a}$

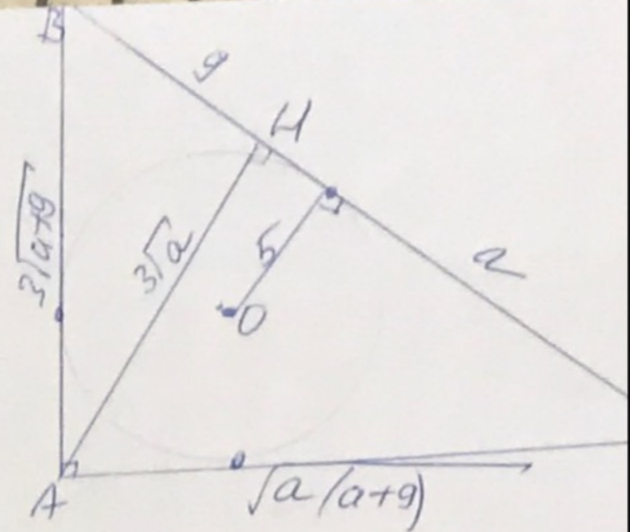
$AB^2 = (3\sqrt{a})^2 + 9^2$ – по т. Пифагора для ΔABH

$AB^2 = 3a + 81$

$AB = \sqrt{9a+81} = 3\sqrt{a+9}$

$AC^2 + AB^2 = BC^2$ – по т. Пифагора для ΔABC

$AC = \sqrt{(9+a)^2 - (3\sqrt{a+9})^2} = \sqrt{81 + 18a + a^2 - 9(a+9)} = \sqrt{81 - 81 + 9a + a^2} = \sqrt{a(a+9)}$



~~Найдём площадь Δ-ка ABC через высоту $S = \frac{3\sqrt{a} \cdot (9+a)}{2}$~~

~~С другой стороны S можно выразить через r и p~~

~~$S = \frac{3\sqrt{a+9} + \sqrt{a(a+9)} + \sqrt{a+9}}{2} \cdot 5 = \frac{3\sqrt{a}\sqrt{a+9}}{2}$~~

$r = \frac{a+b-c}{2}$, где a, b, c – стороны Δ-ка

$\Rightarrow \sqrt{a(a+9)} + 3\sqrt{a+9} - 9 - a = 10$

$\sqrt{a(a+9)} + 3\sqrt{a+9} = a + 19$

Т.к. обе части неотрицательны возведём в квадрат,

$a(a+9) + 9(a+9) + 6(a+9)\sqrt{a} = a^2 + 38a + 361$

$9a + 9a + 81 + 6(a+9)\sqrt{a} = 38a + 361$

$6(a+9)\sqrt{a} = 280 + 20a$

$3(a+9)\sqrt{a} = 140 + 10a$

~~Т.к. обе части ≥0 возведём в квадрат~~

~~$100a^2 + 19600 + 2800a = 9(a+9)^2 a$~~

~~$100a^2 + 19600 + 2800a = 9a(a^2 + 18a + 81) = 9a^3 + 162a^2 + 729a$~~

$\sqrt{a} = t$

$3(t^2+9)t = 140+10t^2$

$3t^3+27t-10t^2-140=0$

$3t^3-10t^2+27t-140=0$

$t=4$ - корень $(3\cdot4^3-10\cdot4^2+27\cdot4-140=0$

$192-160+108-140=0$

$140-140=0$

$0=0)$

$$
\begin{array}{l|l}
3t^3-10t^2+27t-140 & t-4 \\ \hline
\underline{3t^3-12t^2} & 3t^2+2t+35 \\
\quad 2t^2+27t & \\
\quad \underline{2t^2-8t} & \\
\qquad 35t-140 & \\
\qquad \underline{35t-140} &
\end{array}
$$

$3t^2+2t+35=0$

$D=4-4\cdot35\cdot3<0$

$t\in\varnothing$

$\Rightarrow t=4$

$a=t^2=4^2=16$

Отв: 16

(5) $\sin(x^2-2,58)=\cos(\pi x)$

Наименьший корень x - ?

$$\sin(x^2-2,58)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)$$

$$\sin(x^2-2,58)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)=0$$

$$2\sin\frac{x^2-2,58-\frac{\pi}{2}+\pi x}{2}\cos\frac{x^2-2,58+\frac{\pi}{2}-\pi x}{2}=0$$

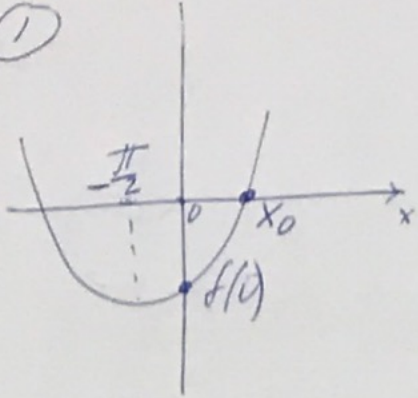
$$\left[\begin{array}{ll} (1) & \dfrac{x^2-2,58-\frac{\pi}{2}+\pi x}{2}=\pi n \\ \\ (2) & \dfrac{x^2-\pi x-2,58+\frac{\pi}{2}}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right.$$

(1) $x^2-2,58-\frac{\pi}{2}+\pi x-2\pi n=0$

$$x^2+\pi x \quad -2,58-\frac{\pi}{2}-2\pi n=0$$

$$x_в=\frac{-b}{a}=-\frac{\pi}{2}$$

①



$\longrightarrow$ x_0 - наименьш. $> 0 \Leftrightarrow f(0) < 0$ и наибольшее возможное

В противном случае оба корня < 0

(а чем $\uparrow f(0)$, тем $\downarrow x_0$). Парабола движ. только вверх/вниз)

$f(0) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n - 2{,}58 < 0$ - наиб.

При $n = 0$

$f(x) = x^2 + \pi x - 2{,}58 - \frac{\pi}{2} < 0$

$D = \pi^2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2{,}58\right) 4 = \pi^2 + 2\pi + 10{,}32$

$$x_0 = \frac{-\pi + \sqrt{\pi^2 + 2\pi + 10{,}32}}{2}$$

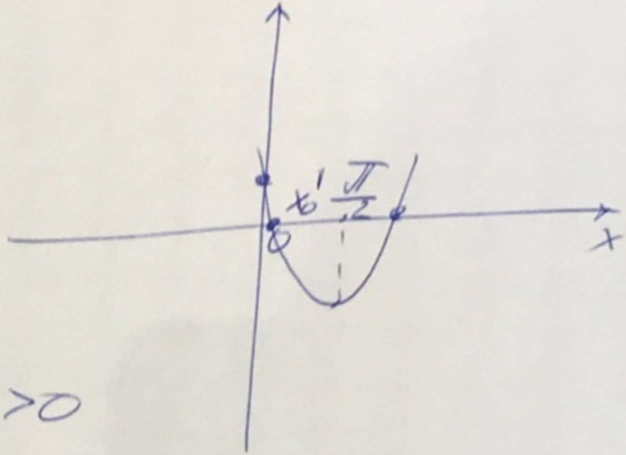
(второй корень может быть „0", т.к. $x_в < 0$)

$-\frac{\pi}{2} < 0$

(2) $x^2 - \pi x - 2{,}58 + \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi n$

$x^2 - \pi x - 2{,}58 - \frac{\pi}{2} - 2\pi n = 0$

$x_в = \frac{\pi}{2}$



x_0' - наим $>0 \Leftrightarrow f(0)$ - наим >0

$f(0) = -2{,}58 - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$

$\underline{n = -1}$

(при $n = 0$ $f(0) < 0$, а $f(n) = -2{,}58 - \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ - убывающая функция $\Rightarrow$ наим знач-е >0 при $\underline{n = -1}$)

$f(x) = x^2 - \pi x - 2{,}58 - \frac{\pi}{2} + 2\pi = x^2 - \pi x + \frac{3\pi}{2} - 2{,}58$

$x^2 - \pi x + \frac{3\pi}{2} - 2{,}58 = 0$

$D = \pi^2 - 6\pi + 10{,}32$

x_0' (тот, что ближе к 0) $= \frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 6\pi + 10{,}32}}{2}$

$x_0 \vee x_0'$

$$\frac{-\pi+\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}32}}{2} \vee \frac{\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32}}{2}$$

$$\sqrt{\pi^2+2\pi+10{,}32} \vee 2\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32}$$

Возведем обе части в кв. т.к $x_0, x_0' > 0$

$$\cancel{\pi^2}+2\pi+\cancel{10{,}32} \vee 4\pi^2 + \cancel{\pi^2} - 6\pi + \cancel{10{,}32} - 4\pi\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32}$$

$$4\pi\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32} \vee 4\pi^2-8\pi \quad \Big| : 4\pi$$

$$\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32} \vee \pi-2$$

Возведем обе части в квадрат

$$\pi^2-6\pi+10{,}32 \vee (\pi-2)^2$$

$$\cancel{\pi^2}-6\pi+10{,}32 \vee \cancel{\pi^2}-4\pi+4$$

$$6{,}32 \vee 2\pi$$

$$3{,}16 > \pi$$

$\Rightarrow x_0'$ - наименьший

Ответ: $\dfrac{\pi-\sqrt{\pi^2-6\pi+10{,}32}}{2}$

№4

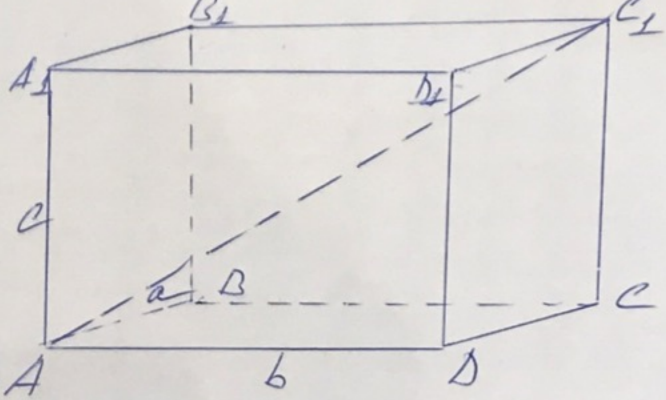
Дано

$AD + AB = 2020$

$AD \cdot AB = AA_1$

$A_1A + 1 = AC_1$

A_1A – ?



Решение

Пусть $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, тогда согласно условиям выполняется след-е:

$$\begin{cases} a+b=2020 \\ ab=c \\ c+1=AC_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$$

$$c+1=\sqrt{2020^2-2c+c^2}$$

$$c^2+2c+1=c^2-2c+2020^2$$

$$4c=2020^2-1$$

$$c=\frac{2019\cdot 2021}{4}$$

$$\begin{array}{r} 2019 \\ \times 2021 \\ \hline 2019 \\ 4038 \\ 40380 \\ \hline 4080399 \end{array}$$

$c = 1.020.099,75$

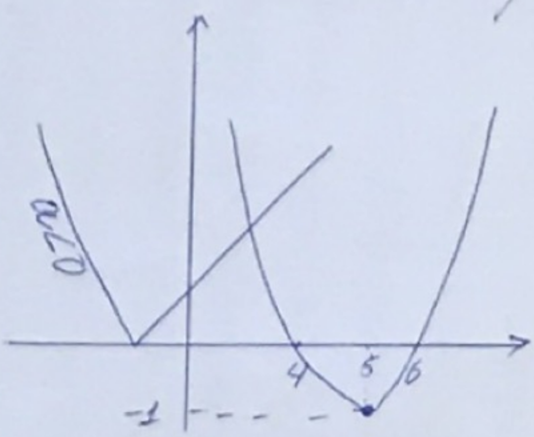
Ответ: $1.020.099,75$

№5 $x^2+a|x-a|=10x-24$

$x^2-10x+24=-a|x-a|$

$f(x^2-10x+24)$ - парабола, ветви ↑ корни $x_1=4, x_2=6, x_в=5 \Rightarrow y_в=-1$

$-a|x-a|$ - галка с вершиной в точке $x=a$ и направление ветвей в зависимости от знака a



① При $a<0$ - два решения (с правой веткой галки)

$x^2-10x+24+ax-a^2=0$

$x^2-x(10-a)+24-a^2$

$D=(a-10)^2-4(24-a^2)=$

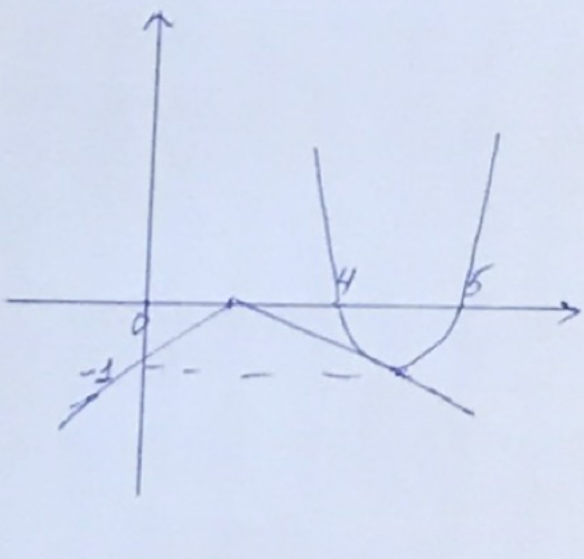
$=(a+10)^2-4(24-a^2)=$

$=a^2+20a+100-96+4a^2=$

$=5a^2+20a+4$

② При $a=0$ - 2 корня (4 и 6)

③ При $a>0$



а) При $a\in(0;4)$ пересечение с правой веткой

$x^2-10x+24=-a(x-a)$

$x^2-x(10-a)+24-a^2=0$

$D=(10-a)^2-4(24-a^2)\geq 0$

$100-20a+a^2-96+4a^2\geq 0$

$5a^2-20a+4\geq 0$

$5a^2-20a+4=0$

$D=400-80=320$

$a_1=\frac{20-\sqrt{320}}{10}=\frac{10-\sqrt{80}}{5}$ $\quad a_2=\frac{20+\sqrt{320}}{10}$ $\quad a_2=\frac{10+\sqrt{80}}{5}$

$a\in\left(-\infty;\frac{10-\sqrt{80}}{5}\right)\cup\left(\frac{10+\sqrt{80}}{5};+\infty\right)$

При $a \in \left(0; \frac{10-\sqrt{80}}{5}\right)$ — два корня

При $a = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{5}$ — 1 корень (касание)

При $a \in \left(\frac{10+\sqrt{80}}{5}, 6\right]$ — два корня

При $a > 6$ — прямая может быть с левой веткой касан

$$x^2-10x+24 = a(x-a)$$

$$x^2-10x+24-ax+a^2=0$$

$$x^2-x(10+a)+a^2+24=0$$

$$D=(10+a)^2-4(a^2+24)=100+20a+a^2-4a^2-96=$$

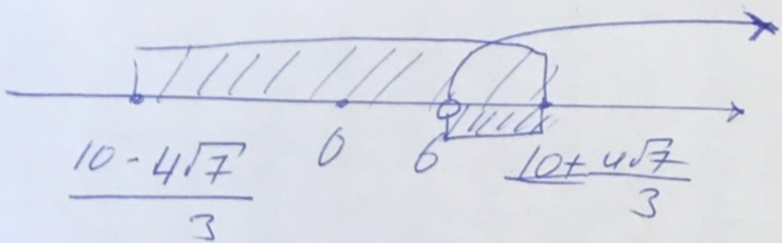
$$=-3a^2+20a+4 \geq 0$$

$$3a^2-20a-4 \leq 0$$

$$D = 400+48=448$$

$$a_1=\frac{20-\sqrt{448}}{6}=\frac{20-8\sqrt{7}}{6} \quad a_2=\frac{20+\sqrt{448}}{6}=\frac{20+8\sqrt{7}}{6}$$

$a \in \left[\frac{10-4\sqrt{7}}{3}; \frac{10+4\sqrt{7}}{3}\right]$



$6 \vee \frac{10+4\sqrt{7}}{3}$

$18 \vee 10+4\sqrt{7}$

$8 \vee 4\sqrt{7}$

$2 \vee \sqrt{7}$

$2 < \sqrt{7}$

При $a \in \left(6; \frac{10+4\sqrt{7}}{3}\right)$ – два корня

При $a = \frac{10+4\sqrt{7}}{3}$ – один корень (касание)

Соберём все полученные промежутки вместе.

~~1) При $a<0$ – два корня~~

~~2) При $a=0$~~

Ответ:

При $a \in \left(-\infty; \frac{10-\sqrt{80}}{5}\right) \cup \left(\frac{10+\sqrt{80}}{5}; \frac{10+\sqrt{112}}{3}\right)$ – два корня

При $a \in \left\{\frac{10-\sqrt{80}}{5}\right\} \cup \left\{\frac{10+\sqrt{80}}{5}\right\} \cup \left\{\frac{10+4\sqrt{7}}{3}\right\}$ – 1 корень

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников „Покори Воробьёвы горы!" Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова академику В.А. Садовничему ученицы 10-го класса школы ГБОУ 1387 города Москвы Амины Викторовны Урусовой

Апелляция

Прошу пересмотреть выставленные [illegible] баллы (85 баллов) за мою работу заключительного этапа по математике, поскольку считаю, что 1-е 4 задачи решены полностью верно, а в 5-й задаче общий ход решения верный и допущен лишь один недочёт на последнем шаге: для промежутков $a \in \left[\frac{10+\sqrt{80}}{5}; 4\right] \cup \left[6; \frac{10+\sqrt{112}}{3}\right] \Leftrightarrow \left[2+\frac{4}{\sqrt{5}}; 4\right] \cup \left[6; \frac{10+4\sqrt{7}}{3}\right]$ стоило бы более внимательно посмотреть, где происходит пересечение графиков. И т.к пересечение происходит выше оси OX для $a \in \left[2+\frac{4}{\sqrt{5}}; 4\right) \cup \left(6; \frac{10+4\sqrt{7}}{3}\right]$, то данные знач-я a не подходят, т.к график модуля для $a > 0$ располагается всецело ниже оси OX.

Аналогично для $a \in [4; 6]$ - одно пересечение происходит ниже оси OX, а второе выше $\Leftrightarrow$ пересечение по OX происходит ~~вне~~ промежутка $[4; 6]$

Таким образом, в работе присутствует лишь один недочёт (на самом последнем шаге), а именно необходимость проверки, где происходит пересечение графиков (выше OX или ниже). В остальном решение чистое и поэтому, на мой взгляд, должно быть оценено в большее кол-во баллов

Дата 30.05.20

Подпись