МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Асирова Алтана Саналовна**

Технический балл: **100**

Дата: **16 февраля 2020 года**

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы» для 10-11 классов

Вариант 2-2

1. Дан квадратный трехчлен с целыми коэффициентами. Может ли его дискриминант быть равен: а) 2024; б) 2023?

2. Велотрек имеет форму окружности. Из его диаметрально противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста, которые двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями. Сколько полных кругов проедет каждый велосипедист до того момента как они поравняются первый раз после старта, если отношение их скоростей равно $\frac{80}{77}$.

3. Для каждого a решите уравнение $(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$.

4. Решите систему

$$\begin{cases} -2\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y + |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - 3\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y| = 0, \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} + \operatorname{ctg} y - 4 = 0. \end{cases}$$

5. Рассматриваются все треугольники, для которых существует такое действительное число a, что произведение трех высот треугольника равно величине $60 + 4a - a^2$. Найдите наибольший возможный радиус вписанной в такой треугольник окружности.

февраль-март 2020 г.

Шифр

№ 3

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_9 25)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_5 3)^{(x-2a-1)^{\frac{1}{2}}} = (\log_{3^2} 5^2)^{(x^2+a^2-2a-8)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\log_5 3)^{(x-2a-1)^{\frac{1}{2}}} = (\log_3 5)^{(x^2+a^2-2a-8)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{(\log_3 5)^{(x-2a-1)^{\frac{1}{2}}}} = (\log_3 5)^{(x^2+a^2-2a-8)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\log_3 5)^{(x-2a-1)^{-\frac{1}{2}}} = (\log_3 5)^{(x^2+a^2-2a-8)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(x-2a-1)^{-\frac{1}{2}} = (x^2+a^2-2a-8)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2a-1}} = \sqrt{x^2+a^2-2a-8}$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_5 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_5 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

Отсюда следует ($\Rightarrow$)

$$\sqrt{x-2a-1} = -\sqrt{x^2+a^2-2a-8} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-2a-1=0 \\ x^2+a^2-2a-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2a+1 \\ 4a^2+4a+1+a^2-2a-8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5a^2+2a-7=0$$

$$D = 12$$

$a_1 = 1$ $\Downarrow$ $x=3$ или $a_2 = -\frac{7}{5}$ $\Downarrow$ $x = -\frac{9}{5}$

Ответ: Если $a=1$, то $x=3$

Если $a=-\frac{7}{5}$, то $x=-\frac{9}{5}$

Если $a \neq 1$ и $a \neq -\frac{7}{5}$, то $\varnothing$

(т.к. подкоренные выражения равны 0, то их неотрицательность проверять не нужно)

№ 1

Квадратный трехчлен: ax^2+bx+c

$D = b^2-4ac$

а) $b^2-4ac=2024$

$b=2k$ – четное

$4k^2-4ac=2024 \quad |:4$

$k^2-ac=506$

$k=25 \qquad a=119 \qquad c=1$

$119x^2+50x+1=0$

$D=2500-4\cdot 119=2024 \Rightarrow$ может

б) $b^2-4ac=2023$

$b^2=4\cdot(ac+505)+3$

Если b – четное, то равенство невозможно, т.к. $b^2 \vdots 4$.

Если $b=2k+1$ – нечетное, то $b^2=4k^2+4k+1$, т.е. при делении на 4 дает остаток 1 $\Rightarrow$ невозможно $\Rightarrow$ не может

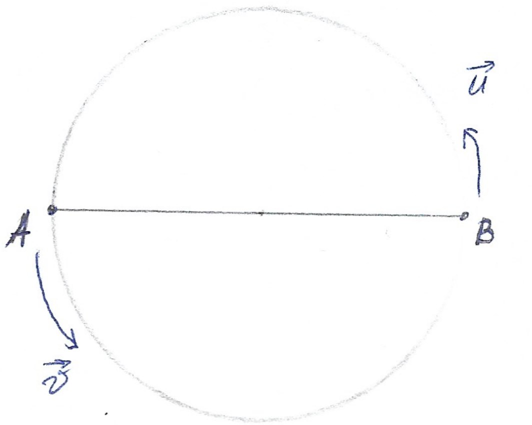
Ответ: а) да б) нет

Шифр

№ 2.

v – скорость 1 велосипедиста

u – скорость 2 велосипедиста



$\frac{u}{v} = \frac{80}{77}$

S – длина круга

$n \cdot S$ – расстояние, пройденное велосипедистом со скоростью u

$(n - \frac{1}{2}) \cdot S$ – расстояние, пройденное велосипедистом со скоростью v

$$\frac{n \cdot S}{u} = \frac{(n-\frac{1}{2}) \cdot S}{v} \Rightarrow \frac{n}{n-\frac{1}{2}} = \frac{80}{77} \Rightarrow n = \frac{40}{3}$$

$\frac{40}{3} \approx 13,3$, т.е. один пройдет 13 полных кругов, а другой 12 полных кругов.

Ответ: 13 и 12 кругов

№ 4

Обозначим: $u = tgx$ $\quad (u \neq 0;\ v \neq 0)$

$v = tgy$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} -2u\cdot v - v + |u - v - 3uv| = 0 \\ \sqrt{\dfrac{3uv - v + u}{uv}} = 4 - \dfrac{1}{v} \end{cases}$$

1° $u - v - 3uv \geq 0$ (1)

$4 - \frac{1}{v} \geq 0$ (*)

$$\begin{cases} u - 2v - 5uv = 0 \\ 3uv - v + u = 16uv - 8u + \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

Из 1 уравнения: $u = \frac{2v}{1-5v}$

$9u - v - 13uv = \frac{u}{v}$

$9u - v - 13\cdot\left(\frac{u - 2v}{5}\right) = \frac{u}{v}$

$45uv - 5v^2 - 13uv + 26v^2 = 5u$

$32uv + 21v^2 - 5u = 0$

$32v \cdot \frac{2v}{1-5v} + 21v^2 - \frac{10v}{1-5v} = 0$

$105v^2 - 85v + 10 = 0 \quad /:5$

$21v^2 - 17v + 2 = 0$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_1 = -\dfrac{4}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{7} \\ u_2 = 1 \end{cases}$$

Пара $(1; \frac{1}{7})$ не удов. ~~ур~~ неравенству (*)

Пара $(-\frac{4}{7}; \frac{2}{3})$ не удов. усл. (1)

2° $u - v - 3uv < 0$

$$\begin{cases} -2uv - v - u + v + 3uv = 0 \\ \sqrt{\dfrac{3uv - v + u}{uv}} = 4 - \dfrac{1}{v} \end{cases}$$

Шифр

$uv - u = 0 \Rightarrow u(v-1)=0$

$u=0$ – не удов.

$tg x = 0$, то $ctg x = \varnothing$

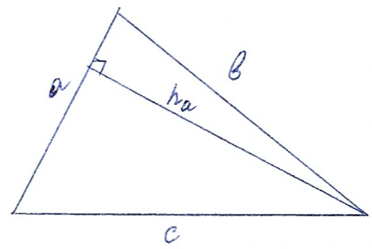
$v = 1$

$u = -\frac{1}{5}$

Ответ: $(-arctg\frac{1}{5}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi n)$, $k, n \in Z$

~~$(arctg\frac{4}{7}+\pi k;\ arctg\frac{2}{3}+\pi n)$~~

№ 5.



$\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a = S = \frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot r$

$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}\cdot\frac{a}{a+b+c}$

$\frac{1}{h_b} = \frac{1}{r}\cdot\frac{b}{a+b+c}$

$\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\cdot\frac{c}{a+b+c} \Rightarrow$

$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\cdot\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{1}{r}$

Итак $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{h_a\cdot h_b\cdot h_c}}$ – неравенство Коши

$\frac{1}{r} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{60+4a-a^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{64-(a-2)^2}}$

При $a=2$ $\frac{1}{r} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow r \leq \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{4}{3}$

Такой треугольник сущ.: $r = \frac{4}{3}$ $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ – он равносторонний со стороной $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$ и $h = 4$

Черновик:

№23:

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = \frac{1}{(\log_5 3)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}} \Rightarrow$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_5 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_3 5)^{-\sqrt{x-2a-1}} = (\log_3 5)^{\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$(\log_5 3)^{\sqrt{x-2a-1}} = (\log_5 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-2a-8}}$$

$$\sqrt{x-2a-1} = -\sqrt{x^2+a^2-2a-8}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-2a-1=0 \\ x^2+a^2-2a-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2a+1 \\ (2a+1)^2+a^2-2a-8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$5a^2+2a-7=0$$

$$D = 4+4\cdot5\cdot7 = (12)^2 \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{-2+12}{10} = 1 \qquad a_2 = \frac{-2-12}{10} = -\frac{7}{5}$$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_2 = -\frac{9}{5}$

Отв: $a=1$; $x=3$

$a=-\frac{7}{5}$; $x=-\frac{9}{5}$

$a=\varnothing$, при др. x

№ 1 Черновик

ax^2+bx+c — трехчлен

$D = b^2 - 4ac$

а) $D = 2024$

Пусть b - четное $b = 2k$ =>

$4k^2 - 4ac = 2024$ /4

$k^2 - ac = 506$

Возьмем k такое, чтобы k^2 было близко к 506

Пусть $k = 28$ => $ac = 119$ Пусть $a = 119$, а $c = 1$ =>

$119x^2 + 50x + 1 = 0$

$D = 2500 - 4 \cdot 119 = 2024$ => сущ.

б) $D = 2023$ — нечетн.

~~$4k^2 - 4ac = 2023$~~

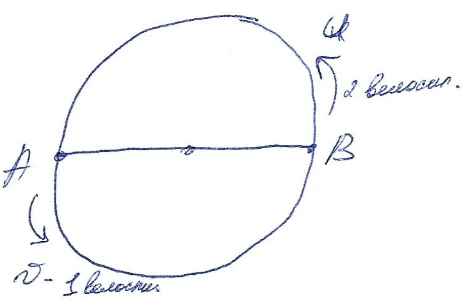
$b^2 = 2023 + 4ac$

1° b - четн. $\varnothing$, т.к. b^2 - четн

2° b - нечетн. — остаток 1 => невозможно

Ответ: а) да б) нет

№ 2.



$\frac{u}{v} = \frac{80}{77}$

Пусть S - длина круга

Пусть n — кол-во кругов

$n \cdot S$ — сколько прошел 1

=> $(n - \frac{1}{2})S$ — прошел 2.

$\frac{nS}{u} = \frac{(n-\frac{1}{2})S}{v}$ ~~Черновик~~ $\Rightarrow \frac{n}{n-\frac{1}{2}} = \frac{u}{v} = \frac{80}{77}$

$77n = 80n - 40 \Rightarrow n = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \approx 13,(3)$

т.к. полн. кругов $\Rightarrow$ один пройдет 13 полных кругов, а второй $13,3 - \frac{1}{2} \approx 12,8 \Rightarrow$ 12 полных кругов.

Отв: 13 и 12 кругов.

№ 4.

$$\begin{cases} -2\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y - \operatorname{tg}y + |\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y - 3\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y| = 0 \\ \sqrt{3 - \operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y} + \operatorname{ctg}y - 4 = 0 \end{cases}$$

Пусть $\operatorname{tg}x = u \quad \operatorname{tg}y = v \quad (u; v \neq 0)$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}x = \frac{1}{u} \quad \operatorname{ctg}y = \frac{1}{v}$

$$\begin{cases} -2uv - v + |u - v - 3uv| = 0 \\ \sqrt{3 - \frac{1}{u} + \frac{1}{v}} + \operatorname{ctg}y - 4 = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{3uv - v + u}{uv}} + \frac{1}{v} - 4 = 0$

$1^\circ \quad u - v - 3uv \geq 0 \quad (1)$

$4 - \frac{1}{v} \geq 0 \quad (*)$

$$\begin{cases} -2uv - v + u - v - 3uv = 0 \\ \frac{3uv - v + u}{uv} = 16 - \frac{8}{v} + \frac{1}{v^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u - 2v - 5uv = 0 \Rightarrow u = \frac{2v}{1-5v} \\ 3uv - v + u = 16uv - 8u + \frac{u}{v} \Rightarrow \end{cases}$$

$9u - v - 13uv = \frac{u}{v}$

$u - 2v - 5uv = 0 \Rightarrow$ Черновик

$uv = \frac{u-2v}{5} \Rightarrow$

$9u - v - 13\left(\frac{u-2v}{5}\right) = \frac{u}{v}$

$45u - 5v - 13u + 26v = \frac{5u}{v}$

$45uv - 5v^2 - 13uv + 26v^2 = 5u$

$21v^2 + 32uv - 5u = 0$

Подставим $u = \frac{2v}{1-5v} \Rightarrow$

$21v^2 + 32v\left(\frac{2v}{1-5v}\right) - \frac{10v}{1-5v} = 0$

$\frac{21v^2(1-5v) + 64v^2 - 10v}{1-5v} = 0$

$\frac{21v^2 - 105v^3 + 64v^2 - 10v}{1-5v} = 0 \quad v \neq \frac{1}{5}$

$105v^2 - 85v + 10 = 0 \quad /:5$

$21v^2 - 17v + 2 = 0$

$D = 289 - 4 \cdot 2 \cdot 21 = 11^2$

$(u;v)$

$v_1 = \frac{17-11}{42} = \frac{1}{7} \qquad v_2 = \frac{17+11}{42} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$u = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{5}{7}} = 1 \qquad u = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{10}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{4}{7}$

$(1; \frac{1}{7})$ $\qquad$ $(-\frac{4}{7}; \frac{2}{3})$

не удов. * $\qquad$ не удов (1)

2° ~~Ш~~. Черновик

$u - v - 3uv < 0$

$\begin{cases} -8uv - v - u + v + 3uv = 0 \\ \sqrt{\dots} = u - \frac{1}{v} \end{cases} \Rightarrow uv - u = 0$

$uv - u = 0 \Rightarrow u(v-1) = 0$

1) $u = 0$ ~~…~~ $\varnothing$ т.к. $tg x \neq 0$ иначе $ctg x\ \varnothing$

2) $v = 1$ ~~…~~ $u = -\frac{1}{5}$

~~$8uv - v + u = 16v - 8u + \frac{u}{v}$~~

~~$3u - 1 + u = 16 - 8u + 4$~~

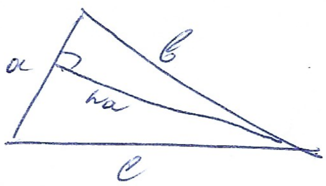
решение

Отв: $v = 1$ $u = -\frac{1}{5}$

~~…~~ $\left(-\frac{1}{5}; 1\right) \Rightarrow$

$\left(-arctg\frac{1}{5} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$

№5.



$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r$

~~h_a~~ $h_a = \frac{(a+b+c)r}{a}$

$h_b = \frac{(a+b+c)r}{b}$

$h_c = \frac{(a+b+c)}{c} \cdot r \Rightarrow$

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}\left(\frac{a+b+c}{a+b+c}\right) = \frac{1}{r}$

по ~~…~~ неравенству Коши

$\frac{1}{r} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{h_a \cdot h_b \cdot h_c}}$, где $h_a \cdot h_b \cdot h_c = 60 + 4a - a^2$

$\frac{1}{r} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{60 + 4a - a^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{64 - (a-2)^2}}$

~~4~~ При $a=2 \Rightarrow$ черновик $\frac{1}{r} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow r \leq \frac{4}{3}$

т.к. наиб. $\Rightarrow r = \frac{4}{3}$

Отв: $\frac{4}{3}$