МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы Горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Чемезов Сергей Сергеевич**

Технический балл: **100**

Дата: **21 мая 2020 года**

Олимпиада школьников «Покори Воробьёвы горы!»

Математика. 11 классы. Заключительный этап 2019/2020 учебного года.

Вариант 3

1. Геометрическая прогрессия состоит из шести членов. Среднее арифметическое её первых четырёх членов равно 30, а среднее арифметическое последних четырёх членов равно 120. Чему может быть равен четвёртый член прогрессии?

2. Каково расстояние между ближайшими друг к другу корнями уравнения

$$\sin(\pi x) = \sin(2x^{\circ})\,?$$

3. Наибольшая сторона треугольника на 20 больше второй по величине стороны, а один из углов треугольника в 2 раза больше другого. Чему может быть равна биссектриса третьего угла, если этот угол в 3 раза больше, чем один из двух других углов?

4. Сергей выбирает случайным образом целое число a из отрезка $[-6; 5]$ и после этого решает уравнение $3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$.

Найдите вероятность того, что Сергей получит три различных корня, из которых, как минимум, два будут целыми, если точно известно, что при вычислениях он не ошибается.

5. В алфавите жителей сказочной планеты АВ2020 всего две буквы: буква *A* и буква *B*. Все слова начинаются на букву *A* и заканчиваются тоже на букву *A*. В любом слове буква *A* не может соседствовать с другой буквой *A*. Также не может идти подряд больше, чем 2 буквы *B*. Например, слова ABBA, ABABABA, ABBABABBA являются допустимыми, а слова ABBAB, ABAABA, ABABBBA – нет. Сколько 21-буквенных слов в словаре этой планеты?

Май 2020 г.

(1) $\begin{cases} \dfrac{b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b + q^3}{4} = 30 \ (2) \\ \dfrac{b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5}{4} = 120 \ (1) \end{cases}$

(1) $\dfrac{q^2 (b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3)}{4} = 120$

$= 30$

$q^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \end{array} \right.$

1) $q = 2$ $\dfrac{b_1 + 2q + 4b_1 + 8b_1}{4} = 30$

$15b_1 = 120$

$b_1 = 8$

$\boxed{b_1 = b_1 q^3 = 8 \cdot 8 = 64}$

2) $q = -2$ $b_1 - 2b_1 + 4b_1 - 8b_1 = 120$

$-5b_1 = 120$

$b_1 = 24$

$\boxed{b_4 = -24 \cdot (-2)^3 = 24 \cdot 8 = 192}$

Ответ: 64 или 192.

Вариант №3

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

(2) $\sin(\pi x) = \sin(2x^{\circ})$

$\sin(\pi x) = -\sin\left(\frac{2x\pi}{180}\right) = 0$

$\sin \pi x - \sin\left(\frac{\pi x}{90}\right) = 0$

$$2\sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{90}}{2} \cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{90}}{2} = 0$$

$$\cancel{2\sin\frac{\pi x - \frac{\pi x}{90}}{2} \cos\frac{\pi x + \frac{\pi x}{90}}{2} = 0}$$

$$2\sin\frac{89\pi x}{180}\cos\frac{91\pi x}{180} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{89\pi x}{180} = 0 \\ \cos\frac{91\pi x}{180} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{89\pi x}{180} = \pi n,\ n \in Z \\ \frac{91\pi x}{180} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{180n}{89} & (1) \\ x = \frac{90}{91} + \frac{180k}{91} & (2) \end{array}\right.$$

В (1) серии min расстояние $\frac{1}{89}$,

В (2) серии min расстояние $\frac{1}{91}$

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{180}{89} - \frac{90}{91} - \frac{180k}{91}\right| =$$

$$= \frac{|16380n - 8190 - 16020k|}{8191} =$$

$$= \underbrace{\frac{10}{8099}|1638n - 819 - 1602k|}$$

$$= \frac{90}{8099}|182n - 91 - 178| \geq \frac{90}{8099} \geq \frac{11}{1000} \geq \frac{1}{91}$$

Поэтому наименьшее $= \frac{1}{91}$ достигается между двумя соседними (например),

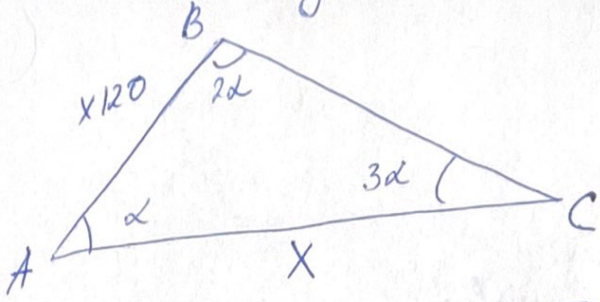
$x_k = \frac{90}{91} + \frac{180k}{91}$

$x_2 - x_1 = \frac{1}{91}$

Ответ: $\frac{1}{91}$

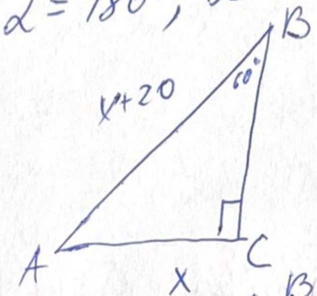
Вариант №3

(3) 1 случай



1) Чем больше угол, тем больше сторона напротив!

$6\alpha = 180^\circ,\ \alpha = 30^\circ$



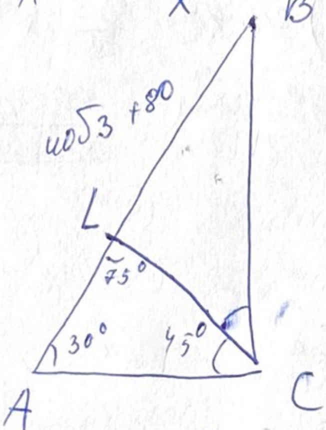
2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{x+20}$

$\sqrt{3}x + 20\sqrt{3} = 2x$

$x(2-\sqrt{3}) = 20\sqrt{3}$

$x = \frac{20\sqrt{3}}{20-\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$

$= 4\sqrt{3} + 60$



3) $\triangle ACL$: т. синусов

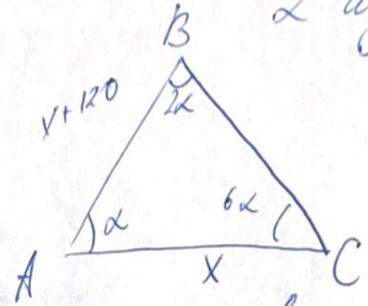
$\frac{CL}{\sin 30^\circ} = \frac{40\sqrt{3}+60}{\sin 75^\circ}$; $CL = \frac{20\sqrt{3}+30}{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}$

$= \frac{20\sqrt{3}+30}{\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)} = \boxed{\frac{80\sqrt{3}+120}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$

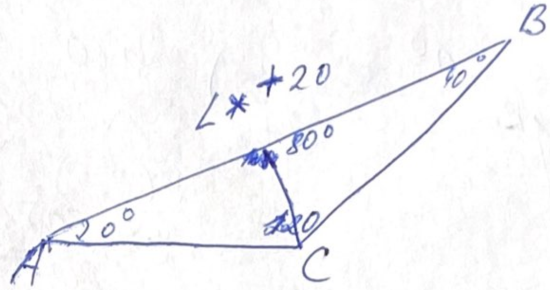
Вариант №3

2 случай

1)



$9\alpha = 180^0$; $\alpha = 20^0$



2) Т. синусов

$\frac{x+20}{\sin 120^0} = \frac{x}{\sin 40^0}$; $(x+20)\sin 40^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 40^0\right) = 20 \sin 40^0$; $x = \frac{40 \sin 40^0}{\sqrt{3} - 2\sin 40^0}$

3) ΔACL: Т. синусов:

$\frac{CL}{\sin 20^0} = \frac{40 \sin 40^0}{(\sqrt{3} - 2\sin 40^0)\sin 100^0}$

$$\boxed{CL = \frac{40 \sin 40^0}{(\sqrt{3} - 2\sin 40^0)\sin 100^0}}$$

Ответ: $\frac{80\sqrt{3} + 120}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ или $\frac{40 \sin 40^0}{(\sqrt{3} - 2\sin 40^0)\sin 100^0}$

Вариант 3

4

$3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 = 0$

$\boxed{x=-1}$ – всегда корень

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + (3a+4)x^2 + (2a+3)x - a + 2 & x+1 \\ \hline -\ 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 + (3a+1)x - a + 2 \\ \quad -\ (3a+1)x^2 + (2a+3)x & \\ \quad\ \ (3a+1)x^2 + (3a+1)x & \\ \qquad -\ (-a+2)x & \\ \qquad\ \ (-a+2)x & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$(x+1)(3x^2 + (3a+1)x - a + 2) = 0$

Всего $[-6; 5]$ 12 целых чисел.

$a = -6$: $3x^2 - 17x + 8 = 0$

$D = 289 - 96 = 193$ – не полный квадрат ⇒ нет целых корней

$a = -5$: $3x^2 - 14x + 7$

$D = 112$ – нет целых корней

$\boxed{a=-4}$: $3x^2 - 11x + 6 = 0$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{array}\right.$!

$D = 49$

$\boxed{a=-3}$: $3x^2 - 8x + 5 = 0$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{array}\right.$!

$a = -2$: $3x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = 25 - 12 \cdot 4 < 0$ $\varnothing$

$a = -1$: $3x^2 - 2x + 3 = 0$ $D < 0$ $\varnothing$

Вариант № 3

$a=0$ $3x^2+x+2=0$ $D<0$ $\varnothing$

$a=1$ $3x^2+4x+1=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ не подходит, т.к. корень -1, уже есть.

$\boxed{a=2:}$ $3x^2+7x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{7}{3} \end{array}\right.$ — подходит

$a=3:$ $3x^2+10x-1=0$

$D=100+12=$ нет целых корней

$a=4:$ $3x^2+13x-2=0$

$D=169+24=193$ нет целых корней

$a=5:$ $3x^2+16x-3=0$

$D=256+36=292$ — нет целых корней

Всего 12 чисел, подходит 3, вероятность $\frac{3}{12}=0{,}25$

Ответ: 0,25.

Вариант №3

5 Заметим, что любое слово алфавита начинается с AB, заканчивается BA

Рассмотрим слово длины $n > 4$

A B _ _ . . . . . . BA

1 Вар. здесь может быть A, тогда след. будет B:

$$A\,B\,\underbrace{A\,B\,\ldots\ldots\,BA}_{\text{слово длины } n-2}$$

!

2 Вар.

$$A\,B\,B\,\underbrace{A\,\ldots\ldots\,BA}_{\text{слово длины } n-3}$$

здесь может быть только A

Пусть T_n – кол-во допустимых слов длины n

Из вышесказанного $T_n = T_{n-2} + T_{n-3}$ при $n > 4$.

$n = 2$: нет слов

$n = 3$: ABA 1

$n = 4$: ABBA 1

$n = 5$: ABABA 1

$n = 6$: ABABBA, ABBABA – 2

$T_7 = T_5 + T_4 = 2$, $T_8 = T_6 + T_5 = 3$, $T_9 = T_7 + T_6 = 4$ и т.д.

Вариант №3

n	кол-во слов
7	2
8	3
9	4
10	5
11	7
12	9
13	12
14	16
15	21
16	28
17	37
18	49
19	65
20	86
21	114

Ответ: 114.

Вариант № 3